

КОМПЛЕКС ПРОГРАММ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В. С. Лебедев

Описан комплекс программ для проведения корреляционно-спектрального анализа временных рядов. Приведены результаты его тестирования на различных моделях.

A set of programs for correlation-spectral analysis of the time series is described. Its testing results with various models are presented.

С увеличением быстродействия электронных вычислительных машин и открытия алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ) численный Фурье-анализ получил значительное распространение в научных исследованиях. В САО АН СССР с 1974 г. используется методика Фурье-анализа для исследования быстрофлуктуирующих объектов. Данную работу можно рассматривать как продолжение и развитие работы [1]. Перечислим другие области применения этой методики в астрономии:

- 1) анализ спектров мощности (СМ) атмосферных мерцаний и дрожаний [2];
- 2) анализ СМ шумов фотоприемников (фотоэмульсии, ФЭУ, ЭОП и др.);
- 3) цифровая фильтрация наблюдательных данных [3—8];
- 4) учет влияния аппаратных функций приборов [9—13];
- 5) анализ контуров спектральных линий [14—16];
- 6) анализ кривых блеска затменных систем;
- 7) поиск флуктуаций фонового радиоизлучения.

Обозначим значения исходного временного ряда через x_j , $j = 0, 1, \dots, N-1$. Результатом использования Фурье-анализа является оценка спектра мощности случайного процесса, которая показывает распределение по частотам вклада в дисперсию.

$$a_m + ib_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j x_j \exp(2\pi ijm/N),$$

$$m = 0, 1, \dots, N-1; \quad (1)$$

$$P_m = a_m^2 + b_m^2 \quad (2)$$

— спектр мощности.

Для того чтобы получить относительный СМ, следует разделить P_m на дисперсию исходного ряда σ^2 :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_j (x_j - \bar{x})^2, \quad (3)$$

где \bar{x} — среднее значение исходного ряда;

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_j x_j. \quad (4)$$

При большом числе слагаемых в (1) a_m и b_m стремятся к нормальному распределению при любом распределении независимых значений x_j . А P_m тогда стремится к χ^2 -распределению с двумя степенями свободы. Последнее обстоятельство позволяет находить доверительные интервалы для оценки СМ.

Неприятной особенностью оцениваемого таким образом СМ является его несостоятельность, т. е. с увеличением длины ряда N эта оценка не стремится

к истинному значению. Это связано с тем, что новая информация используется не только для улучшения оценки СМ, а еще и на получение его оценки на других частотах. Стандартные способы борьбы с этим обстоятельством следующие:

— либо разбивать исходный ряд на части, оценивать на каждом из них СМ и усреднять СМ;

— либо оценить СМ на всем исходном ряде, но затем подвергнуть СМ процедуре цифровой фильтрации;

— либо оценку СМ производить с использованием теоремы Винера—Хинчина, т. е. выразить СМ через преобразование Фурье от автокорреляционной функции, причем последнюю оценивать на длине $M \ll N$.

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1-k} (x_j - \bar{x})(x_{j+k} - \bar{x}), \quad k=0, 1, \dots, M-1. \quad (5)$$

Другой особенностью Фурье-анализа является циклическое продолжение наблюдаемого ряда с возможностью появления скачка в нем и, как следствие,

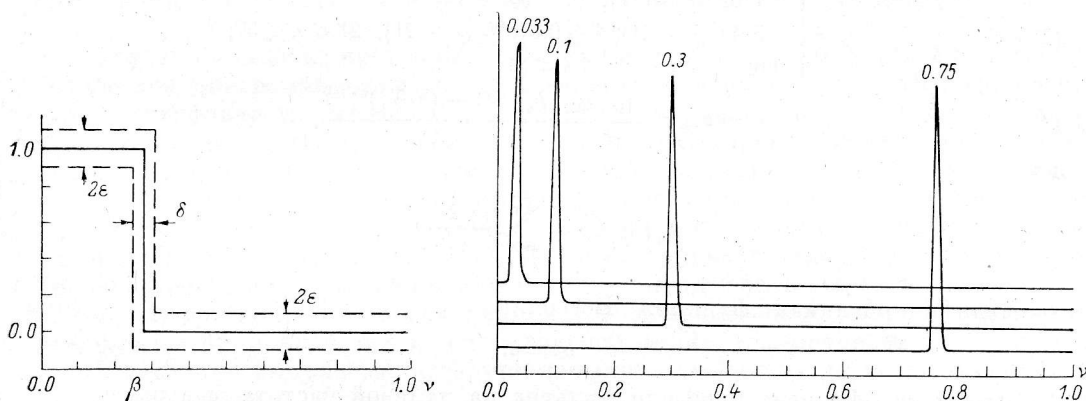


Рис. 1. Амплитудно-частотная характеристика цифрового фильтра высоких частот.

Рис. 2. Спектры мощности гармонического сигнала.

Цифры у пиков — безразмерные частоты.

паразитных высокочастотных составляющих в СМ. Методом борьбы с этим является умножение исходного ряда на временное окно-гладкую функцию, спадающую до нуля к концам массива. Эта операция в частотной области соответствует свертке (а значит, и цифровой фильтрации) с функцией, соответствующей преобразованию Фурье от временного окна, поэтому для исключения появления ложных пиков на СМ следует выбирать окна с минимальным уровнем боковых лепестков.

Изложение свойств дискретного преобразования Фурье и методов его практического использования можно почерпнуть из книг и статей [17—56].

Наблюдательные данные довольно часто содержат значительные тренды, что приводит к подъему СМ в области низких частот. Такие способы, как аппроксимация тренда полиномом некоторой степени или фильтр первых разностей, рекомендуемый в [17], приводят к неудовлетворительным результатам. В первом случае в СМ все равно остается подъем из-за того, что реальные тренды редко описываются полиномами, а во втором — из-за высокого уровня ложных пиков в СМ. По нашему мнению, качественную фильтрацию может обеспечить только идеальный цифровой фильтр (ЦФ).

Нерекурсивный ЦФ описывается выражением

$$y_j = \sum_{k=-N_p}^{N_p} b_k x_{j+k}, \quad j=0, 1, \dots, N-1, \quad (6)$$

причем недостающие отсчеты x_{j+k} берем, используя циклическое продолжение. Требование отсутствия фазовых искажений дает условие симметрии коэффи-

циентов $b_{-k}=b_k$. Введем безразмерную частоту $\nu=f/f_N$, где $f_N=1/(2\tau)$ — частота Найквиста; τ — шаг квантования. Требуется сконструировать ЦФ со следующей амплитудно-частотной характеристикой (рис. 1): полностью пропускает (задерживает) до некоторой частоты, после которой полностью задерживает (пропускает). Обозначим через β безразмерную частоту среза, через δ — ширину переходной области, а через ε — амплитуду пульсаций в областях пропускания и задержки (вместо ε часто используют $\lambda=-20 \lg \varepsilon$, т. е. выражают амплитуду пульсаций в децибелах). Итак, заданы β , δ , λ . Требуется найти N_p и b_k . Ясное и алгоритмизированное изложение этого содержится в работе Кайзера и Рида [7]. При $\delta < 2\beta$ и $\varepsilon < 0.02$ имеет место следующий алгоритм расчета N_p и b_k :

$$(1) \quad N_p = \text{entier}(K_f/(2\delta) + 0.75),$$

где

$$K_f = \begin{cases} 0.13927(\lambda - 7.95), & \lambda > 21; \\ 1.8445, & \lambda \leq 21; \end{cases}$$

$$(2) \quad \eta = \begin{cases} 0.1102(\lambda - 8.7), & \lambda \geq 50; \\ 0.5842(\lambda - 21)^{0.4} + 0.07886(\lambda - 21), & 21 < \lambda < 50; \\ 0.0, & \lambda \leq 21; \end{cases}$$

$$(3) \quad b_k = b_{-k} = \frac{\sin(\beta k \pi) J_0(\eta(1 - (k/N_p)^2)^{1/2})}{k\pi J_0(\eta)},$$

где

$$J_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(x/2)^k}{k!} \right)^2$$

— модифицированная функция Бесселя;

$$(4) \quad b_0 = \beta.$$

Чтобы коэффициент передачи фильтра на нулевой частоте был равен единице, следует нормировать коэффициенты фильтра

$$b_k = b_k \left(b_0 - 2 \sum_{k=1}^{N_p} b_k \right),$$

$k = 0, 1, \dots, N_p$.

Чтобы из фильтра высоких частот сделать фильтр низких частот, достаточно результат работы фильтра ВЧ вычесть из исходных данных:

$$y_i = x_i - \sum_{k=-N_p}^{N_p} b_k x_{i+k} = \sum_{k=-N_p}^{N_p} \tilde{b}_k x_{i+k}.$$

Отсюда следует

$$\tilde{b}_0 = 1 - \beta;$$

$$\tilde{b}_k = -b_k, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N_p.$$

Гарантированный минимум боковых лепестков не вносит заметных ложных пиков в СМ, что делает такой ЦФ привлекательным в задачах обнаружения слабых сигналов.

Из окон, рассмотренных в [28], мы выбрали окно Кайзера—Бесселя, как имеющее очень малый уровень боковых лепестков:

$$w_j = \begin{cases} J_0(\pi\alpha(1 - (j/M)^2)^{1/2})/I_0(\pi\alpha), & j < M; \\ 0, & j \geq M. \end{cases}$$

При $\alpha=3.5$ максимальный уровень боковых лепестков составляет 82 дБ.

Дискретное преобразование Фурье мы вычисляли алгоритмом Кули—Тьюки, адаптированным к работе с действительными исходными данными [22].

Для оценки доверительного интервала СМ используем тот факт, что величина $\mu P(f)/\Gamma(f)$ распределена по закону χ^2 с числом степеней свободы

$$\mu = 2N \int_{-\infty}^{\infty} w(u) du \approx 3.7N/M,$$

где $\Gamma(f)$ — теоретическое значение СМ. Тогда интервал

$$\left[\frac{\mu P(f)}{x_{\mu}(1-\alpha/2)}, \frac{\mu P(f)}{x_{\mu}(\alpha/2)} \right]$$

является $100(1-\alpha)\%$ -ным доверительным интервалом для $\Gamma(f)$. Здесь $x_{\mu}(\alpha)$ — квантиль распределения χ^2 . При большом числе степеней свободы распределение χ^2 стремится к нормальному, что упрощает оценку доверительного интервала.

Нами был создан комплекс программ для ЭВМ М-222 на языке алгол (транслятор ТА-1М), позволяющий производить спектрально-корреляционный анализ временных рядов. Кроме основного модуля обработки он содержит подпрограммы ввода информации с различных машиночитаемых носителей, дополнительной обработки информации, графического вывода результата. Частично этот комплекс реализован и на ЭВМ М-4030 в системе ДЭС также на языке алгол.

Условно комплекс программ можно разделить на три части. К первой части относятся программы, позволяющие вводить информацию с различных носителей (перфокарты, перфолента с различной кодировкой, магнитная лента) и записывать ее на магнитную ленту в стандартной форме по 2048 чисел, причем первым числом указывается длина содержательной части записываемого массива. Кроме того, к первой части можно отнести программы, позволяющие генерировать данные, которые используются для тестирования программы и калибровки результатов ее работы. Можно генерировать данные из следующего набора элементарных сигналов и шумов: нормальный белый шум, гармонические сигналы произвольной частоты и амплитуды, периодические последовательности импульсов прямоугольной или треугольной формы, квазипериодические последовательности импульсов, детерминированные последовательности импульсов в форме гауссиан.

Вторая часть содержит основные обрабатывающие процедуры. Данные для нее берутся с магнитной ленты, а результаты (АКФ и СМ) также заносятся на магнитную ленту. Если заданы соответствующие параметры, то программа производит ЦФ высоких и (или) низких частот. Затем вычисляет АКФ, умножает ее на временное окно Кайзера—Бесселя и производит преобразование Фурье. Имеется модификация этой части, в которой СМ получают, минуя вычисление АКФ.

Программы третьей части производят различные действия с занесенными на магнитную ленту АКФ и СМ (фильтрацию, усреднение, вывод на печать и графопостроитель).

На рис. 2 изображены СМ гармонических сигналов различной частоты. Обращает на себя внимание отсутствие боковых лепестков и постоянство абсолютного спектрального разрешения с частотой. На рис. 3 демонстрируется возможность разрешения двух близких гармонических сигналов. Хорошо разрешаются синусоиды, различающиеся по частотам на 5%.

На рис. 4 приведены СМ суммы гармонических сигналов различной амплитуды и нормального белого шума с единичной дисперсией. При длине исходного ряда $N=2048$ точек и ширине окна $M=256$ точек с достоверностью 99.7% выявляется синусоида амплитудой $a=0.2\sigma$. Дальнейшее улучшение чувствительности путем усреднения нескольких СМ дается большой ценой, так как чувствительность растет очень медленно — как $k^{1/4}$, где k — число участвующих в усреднении СМ. Например, для повышения чувствительности на 1^m требуется увеличение времени наблюдения в 40 раз. СМ последовательностей прямоугольных импульсов приведены на рис. 5 и 6, причем на рис. 6 — для случайного расстояния между импульсами, распределенного по нормальному закону. Обращает на себя внимание «выживание» некоторых гармоник при значительных вариациях расстояния между импульсами.

Наконец, на рис. 7 представлен СМ наблюдений пульсара в Крабовидной туманности в 12"-ной диафрагме 6-метрового телескопа с $\tau=1$ мс. Наблюдения проводились Г. М. Бескиным, С. И. Неизвестным, А. А. Пимоновым,

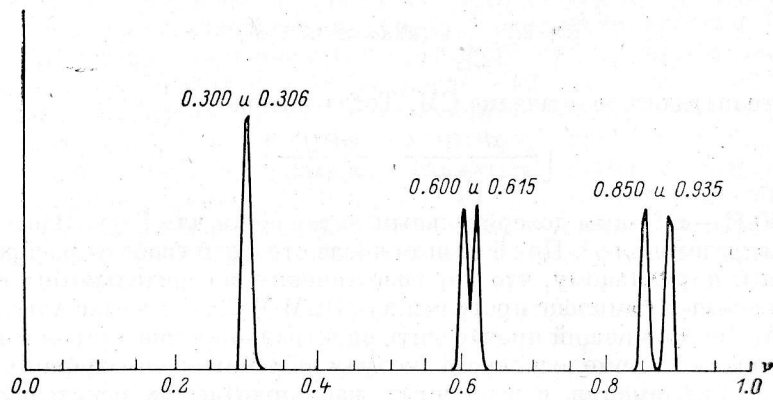


Рис. 3. Спектры мощности близких по частоте гармонических сигналов.

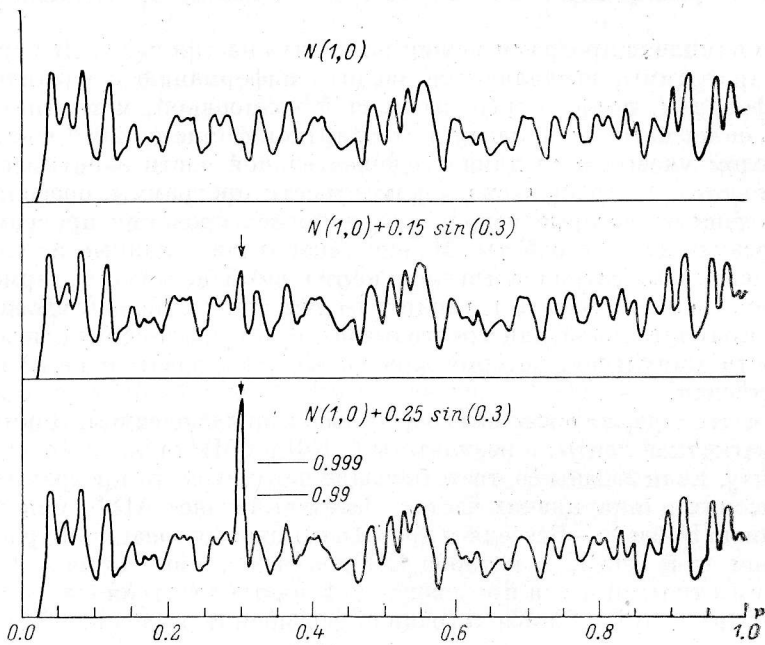


Рис. 4. Спектры мощности смеси нормального белого шума и гармонические сигналы.
Показаны 0.99 и 0.999 доверительные интервалы.

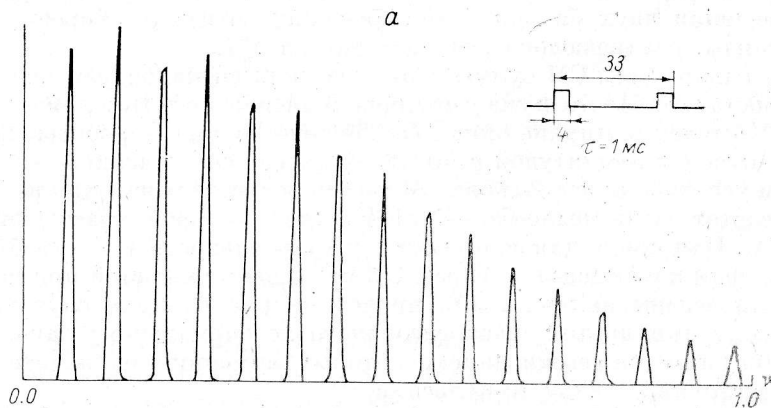


Рис. 5. Спектры мощности последовательностей прямоугольных импульсов.

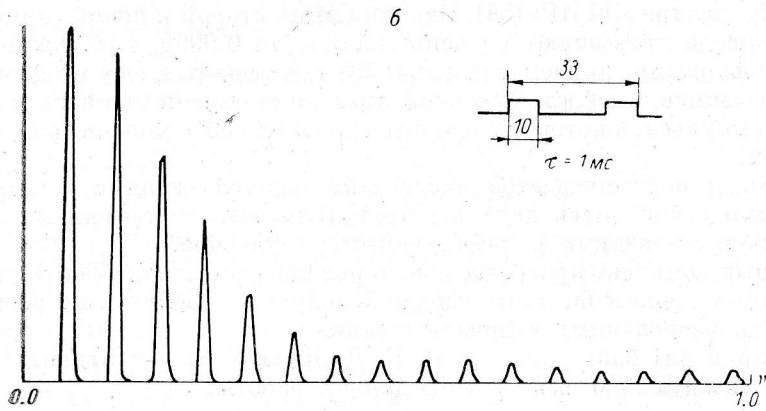


Рис. 5 (продолжение).

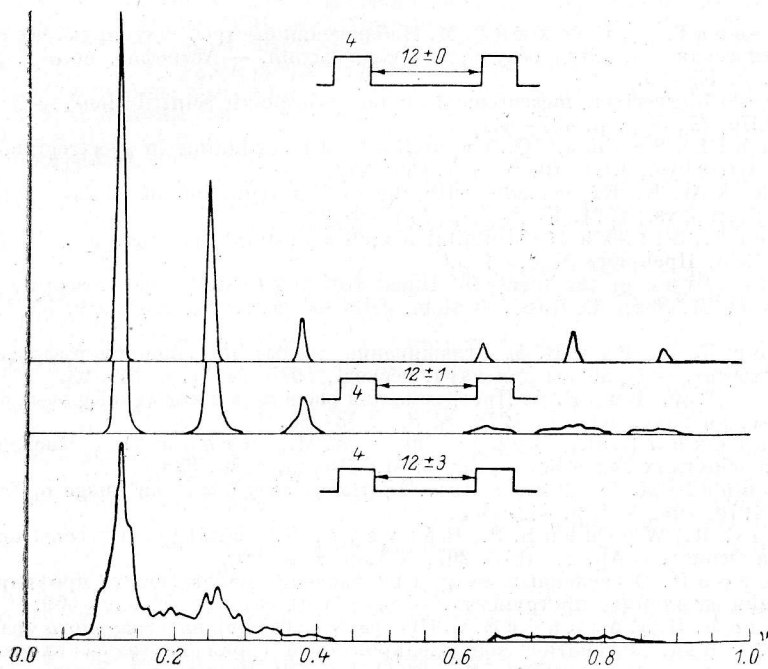


Рис. 6. Спектры мощности последовательностей прямоугольных импульсов при вариациях расстояния между импульсами.

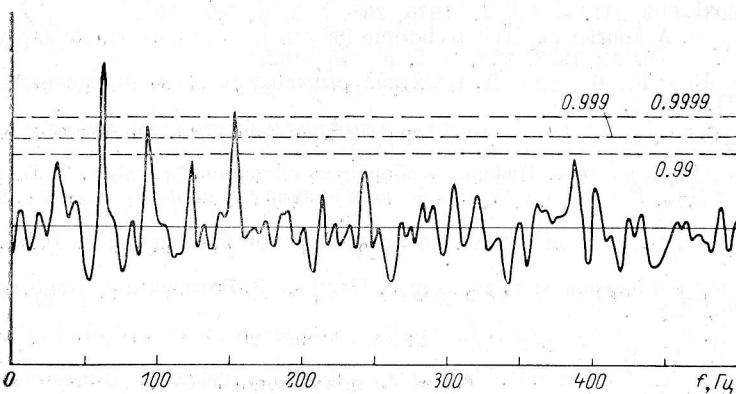


Рис. 7. Спектр мощности излучения пульсара в Крабовидной туманности.

В. Л. Плахотниченко и В. Ф. Шварцманом с помощью комплекса МАНИЯ [57] и электрофотометра «ЭФИР» [58]. Оценки СМ на второй и пятой гармониках основного периода превышают уровень значимости 0.9999, т. е. являются абсолютно достоверными, причем уровень 0.999 превышает еще и оценкой СМ на третьей гармонике. Слабость основной гармоники объясняется наличием у пульсара интеримпульса, в котором сосредоточено около 50% мощности по сравнению с основным.

Этот вывод подтверждается численным экспериментом с данными, представляющими собой смесь двух последовательностей треугольных импульсов с параметрами, близкими к наблюдаемым у пульсара.

Созданный комплекс программ можно использовать для эффективной оценки СМ различных процессов, а его основной модуль — БПФ — для решения других задач, перечисленных в начале статьи.

Автор приносит благодарность В. К. Дубровичу за многогранную деятельность, способствующую выполнению данной работы.

Литература

1. Алексеев Г. Н., Бескин Г. М. Наблюдения быстрофлуктуирующих объектов. II. Математическая обработка результатов наблюдений. — *Астрофиз. исслед.* (Изв. САО), 1976, 8, с. 53—63.
2. P a t e r n o L. Spectrum measurement of star atmospheric scintillations. — *Astron. Astrophys.*, 1976, 47, N 3, p. 437—441.
3. R u s c o n i L., S e d m a k G. The digital filterin technique in spectrogram analysis. — *Astron. Astrophys.*, 1971, 10, N 3, p. 469—473.
4. B o n s a c k W. K. Experiments with the digital reduction of stellar spectrograms. — *Astron. Astrophys.*, 1971, 15, N 3, p. 374—382.
5. K i r p e r T., S i t s k a J. On digital reduction of stellar spectrograms. — *Тарту астроном. обсер.*, 1975, Препринт № 6, 21 p.
6. A p p l i c a t i o n of the theory of linear filtering to stellar spectroscopy / S. Gaudenzi, L. Gratton, R. Nesci, C. Rossi. — *Mem. della soc. astr. Italiane*, 1979, 50, N 2, p. 227—244.
7. К а й з е р Д. Ф., Р и д В. А. Сглаживание данных при помощи цифрового фильтра низких частот. — *Приборы для науч. исслед.*, 1977, № 11, с. 82—93.
8. К а й з е р Д. Ф., Р и д В. А. Программа для расчета полосовых цифровых фильтров. — *Приборы для науч. исслед.*, 1978, № 8, с. 83—86.
9. Г о н ч а р с к и й А. В., Ч е р е п а щ у к А. М., Я г о л а А. Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики. М.: Наука, 1978. 335 с.
10. M e D o n n e l l M. J., B a t e s R. H. Digital restoration of an image of Betelgeuse. — *Ap. J.*, 1976, 208, N 2, p. 443—452.
11. L u n d a C. R., W o r d e n S. P., H a r v e y J. W. Digital image reconstruction applied to Alpha Orionis. — *Ap. J.*, 1976, 207, N 1, p. 174—180.
12. С а т т а р о в И. О численных методах исправления наблюдаемого профиля спектральных линий за влияние инструмента. — *АЖ*, 1978, 55, № 3, с. 649—659.
13. Д о б к и н Л. И., С и з и к о в В. С. Программы решения интегрального уравнения типа свертки. — В кн.: Математическое моделирование и теория электрических цепей. Вып. 14. Респ. межвуз. сб. Киев, 1976, с. 20—31 (АН УССР. Ин-т электродинамики).
14. S m i t h M. A., G r a y D. F. Fourier analysis of spectral line profiles: a new tool for an old art. — *PASP*, 1977, 88, N 526, p. 809—823.
15. S m i t h M. A., P a r s o n s S. B. Applications of Fourier analysis to broadening of stellar line profiles. I. — *Ap. J., Suppl.*, 1975, 29, N 289, p. 341—362; II. — *Ap. J.*, 1976, 203, N 3, p. 603—609; III. — *Ap. J.*, 1976, 208, N 2, p. 487—493.
16. E b b e t s D. A Fourier analysis technique for measuring photospheric expansion in early-type stars. — *Ap. J.*, 1978, 224, N 1, p. 185—192.
17. Д ж е н к и н с Г., В а т т с Д. Спектральный анализ и его приложения. Вып. 1. М.: Мир, 1971. 316 с.
18. Д ж е н к и н с Г., В а т т с Д. Спектральный анализ и его приложения. Вып. 2. М.: Мир, 1972. 287 с.
19. Г о л д Б., Р е й д е р Ч. Цифровая обработка сигналов. М.: Мир, 1973. 316 с.
20. Б е н д а т Дж., П и р с о л А. Измерение и анализ случайных процессов. М.: Мир, 1974. 464 с.
21. С о р о к о Л. М., С т р и ж Т. А. Спектральные преобразования на ЦВМ. Дубна, 1972. 136 с.
22. В в е д е н и е в цифровую фильтрацию / Под ред. Р. Богнера и А. Константинодиса. М.: Мир, 1976. 216 с.
23. O t h e s R. K., E n o c h s o n L. Applied time series analysis. Vol. 1. Basic techniques, 1978, N 4, 449 p.
24. Р а б и н е р Л., Г о у л д Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978. 848 с.

25. Я р о с л а в с к и й Л. П. Введение в цифровую обработку изображений. М.: Мир, 1979. 312 с.
26. П о л я к И. И. Методы анализа случайных процессов и полей в климатологии. Л.: Гидрометеоздат, 1979. 256 с.
27. Д о р м а н Л. И., П и м е н о в И. А., С а ц у к В. В. Математическое обеспечение исследований геофизических закономерностей на примере космических лучей. М.: Наука, 1978. 152 с.
28. Х э р р и с Ф. Дж. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье. — ТИИЭР, 1978, 66, № 1, с. 60—96.
29. А л г о р и т м ы быстрого преобразования Фурье и их свойства / А. А. Белый и др. — Зарубеж. радиоэлектроника, 1979, № 2, с. 3—29.
30. Ю а н ь С. К. Сравнение пяти методов вычисления спектра мощности случайного процесса с использованием сегментации данных. — ТИИЭР, 1977, 65, № 6, с. 200—202.
31. О в ы ч и с л е н и и мгновенного спектра / В. М. Ефанов и др. — Автометрия, 1973, № 3, с. 39—43.
32. Б л э ч м е н. Сопоставление преобразования Фурье и Уолша. — ТИИЭР, 1974, 62, № 3, с. 72—83.
33. Г у с е в В. Д. Процедура быстрого преобразования Фурье и быстрого преобразования Уолша. — В кн.: Вычислительные системы/Под ред. Н. Г. Загоруйко. Вып. 45. Новосибирск, 1971, с. 107—116.
34. Ч а й л д е р с Д. Дж., С к и п п р Д. П., К е м е р е й т Р. Ч. Кепстр и его применения при обработке данных. — ТИИЭР, 1977, 65, № 10, с. 5—23.
35. П р о г р а м м ы быстрых преобразований Фурье, Меллина и Фурье—Бесселя / Д. К. Тхабасимов и др. М., 1978. 17 с. (Ин-т косм. исслед., № Пр-418).
36. К о н я е в П. А. Программа спектрального анализа стационарных случайных процессов (ПОО2611). — Алгоритмы и программы, 1978, № 1, поз. 106.
37. Б ы с т р о е дискретное преобразование Фурье (ПООС2806) / Д. А. Бурджанадзе и др. — Алгоритмы и программы, 1978, № 2, поз. 115.
38. Г о ф а й з е н О. В. Алгоритмы быстрого преобразования Фурье (ПОО2676). — Алгоритмы и программы, 1978, № 2, поз. 106.
39. А л г о р и т м ы взаимного спектрального анализа двух стационарных случайных процессов (ПОО2875) / Х. А. Валеев и др. — Алгоритмы и программы, 1978, № 3, поз. 69.
40. О б р а з ц о в Н. Н. Процедура быстрого преобразования Фурье (ПОО1177). — Алгоритмы и программы, 1975, № 2, поз. 16.
41. К у р ь я н о в Б. Ф., М е д в е д е в а Л. Е. Гармонический анализ стационарных случайных процессов. М., МГУ, 1970. 63 с. (МГУ, ВЦ. Сер. Статистика и стохастические системы. Вып. 8).
42. К а л и н и н Н. И., К р е н к е л ь Т. Э. Быстрое преобразование Фурье для действительной функции (ПОО0741). — Алгоритмы и программы, 1974, № 3, поз. 216.
43. К а л и н и н Н. И., К р е н к е л ь Т. Э. Быстрое преобразование Фурье для комплексной функции (ПОО0742). — Алгоритмы и программы, 1974, № 3, поз. 217.
44. О л е в с к а я С. М. Алгоритм нахождения спектральной плотности случайных процессов по данным наблюдений (ПОО1051). — Алгоритмы и программы, 1975, № 1, поз. 11.
45. Ф а й н б е р г Э. Б. Быстрое преобразование Фурье. — В кн.: Программы обработки геомагнитных данных на ЭВМ Мир-1. М., 1975, с. 5—6. (АН СССР ИЗМИР).
46. Т у т л е н е М. И., Г а б р и е л а в и ч ю с А. З. Программа для определения спектра мощности методом быстрого преобразования Фурье (ПОО1383). — Алгоритмы и программы, 1975, № 3, поз. 53.
47. Л у н и н В. Ю. Комплекс программ быстрого преобразования Фурье. — В кн.: Программное обеспечение структурных исследований. Пуццино, 1979. 45 с. (Науч. центр биол. исслед., № 3).
48. К о р ш е в е р И. И. Об организации Фурье-преобразования больших массивов. — Автометрия, 1975, № 2, с. 73—83.
49. Ч т о т а к о е быстрое преобразование Фурье? / Коркен и др. — ТИИЭР, 1967, 55, № 10, с. 21—48.
50. Б е р г л а н д. Руководство к быстрому преобразованию Фурье. — Зарубеж. радиоэлектроника, 1971, № 3, с. 52—72.
51. W h a t i s t h e F F T ? / W. T. Cochran et al. — IEE Trans. A. and. E., 1967, AU-15, p. 45—55.
52. C o o l e y J. W., T u k e y J. An algorithm for the mechine calculation of complex Fourier series. — Math. Comput., 1965, 19, p. 297—301.
53. S i n g l e t o n R. C. Algorithm 338. Algol procedures for the FFT. — SASM, 1968, N 11, p. 647—654.
54. S i n g l e t o n R. C. Algorithm 339. Algol procedure for the FFT with arbitrary factors. — SASM, 1968, N 11, p. 776—779.
55. С и н г л е т о н. Алгоритм быстрого вычисления преобразования Фурье. — Экспресс-информация. Вычислительная техника, 1968, № 5, с. 11—17.
56. N o u n g P. An error analysis of power spectra. — Astron. Astrophys., 1976, 47, N 3, p. 449—452.
57. Ш в а р ц м а н В. Ф. Эксперимент МАНИЯ. Астрофизические задачи, математические методы, инженерный комплекс, результаты первых наблюдений. — Сообщ. САО, 1977, 19, с. 5—38.
58. Н е и з в е с т н ы й С. И., П и м о н о в А. А. Электрофотометр первичного фокуса БТА. — Сообщ. САО, 1978, 23, с. 56—67.

Поступила в редакцию 27.01.81