

УДК 524.45-17/355; 524.3-17/355

## КОРРЕЛЯЦИИ, СПЕКТРЫ И НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЕБАНИЙ ФАЗОВОЙ ПЛОТНОСТИ В МОДЕЛЯХ РАССЕЯННЫХ ЗВЁЗДНЫХ СКОПЛЕНИЙ

© 2013 В. М. Данилов\*, С. И. Путков\*\*

*Коуровская астрономическая обсерватория, Уральский федеральный университет,  
Екатеринбург, 620000 Россия*

Поступила в редакцию 28 декабря 2012 года; принята в печать 15 февраля 2013 года

Динамическая эволюция шести моделей рассеянных звездных скоплений исследуется с применением корреляционного и спектрального анализа колебаний фазовой плотности в этих моделях. Вычислены двухвременные корреляции и взаимные корреляционные функции для флуктуаций фазовой плотности моделей скоплений. По данным о двухвременных и двухчастичных корреляциях определены время корреляции колебаний фазовой плотности (от 0.1 до 1 времени бурной релаксации модели  $\tau_{v,r}$ ) и средние фазовые скорости распространения таких колебаний в моделях скоплений. Эти скорости в 2–20 раз меньше среднеквадратических скоростей движения звезд в ядре скопления. Для вычисления спектров мощности и дисперсионных кривых колебаний фазовой плотности использовалось Фурье-преобразование взаимных корреляционных функций. Подтверждено наличие известных неустойчивых колебаний фазовой плотности, связанных с гомологическими колебаниями ядер скоплений. Обнаружен ряд новых неустойчивых колебаний фазовой плотности в этих моделях (до 32–41 пары колебаний с разными комплексно-сопряженными частотами в каждой модели; время нарастания амплитуд таких колебаний в  $e$  раз составляет  $(0.4–10)\tau_{v,r}$ , фазы таких колебаний достаточно равномерно распределены). Обсуждаются астрофизические приложения полученных результатов (иррегулярная структура рассеянных звездных скоплений, формирование и распад квазистационарных состояний в таких скоплениях).

Ключевые слова: *звёзды: кинематика и динамика—Галактика: рассеянные скопления*

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Теоретические оценки флуктуаций фазовой плотности и соответствующих им корреляционных функций для пространственно однородных и неоднородных систем с дальнедействующими взаимодействиями (в том числе и для самогравитирующих систем) были недавно выполнены в работах [1–3]. Для оценок в этих работах использовались кинетические уравнения, записанные с учетом ряда упрощающих предположений. Полученные в [1–3] выражения для корреляционных функций имеют достаточно сложный вид, что затрудняет их применение для анализа динамических процессов в таких системах. На наш взгляд, представляется более продуктивным прямое вычисление корреляционных функций по данным численного интегрирования уравнений движения гравитирующих частиц в задачах по сгущиванию галактик и эволюции Вселенной (см., например, [4–6]), а также при

моделировании динамики рассеянных звездных скоплений (РЗС) [7].

В работе [7] были вычислены двухвременные корреляции для величин  $r = |\mathbf{r}|$ ,  $v = |\mathbf{v}|$  и энергии звезды  $\varepsilon$ , приходящейся на единицу массы звезды, а также двухчастичные корреляции величин  $r$ ,  $v$ ,  $\varepsilon$ , плотности числа звезд  $n = n(\mathbf{r}, t)$  и фазовой плотности  $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  моделей РЗС в окрестностях этих звезд (здесь  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор и  $\mathbf{v}$  — вектор скорости звезды). По данным о корреляциях в работе [7] были определены время  $\tau_c$  и радиус  $r_c$  корреляции в пространствах указанных параметров, определены параметры волн плотности, потенциала и фазовой плотности в моделях скоплений звезд, отмечены признаки формирования поляризационных облаков при достижении определенных расстояний между звездами, обнаружен доминирующий поток корреляций величин фазовой плотности из области сильных корреляций в область слабых корреляций. Такой поток приводит к появлению потока кинетической энергии  $T$  к центру скопления (из области крупномасштабных колебаний  $f$  в мел-

\*E-mail: Vladimir.Danilov@usu.ru

\*\*E-mail: Putkov\_S@mail.ru

комасштабные (см. [8]) с меньшими амплитудами и большими частотами). Согласно [7], скорости нагрева ядер моделей скоплений этим потоком составляют  $\dot{T} \sim (0.1-1.6)T/\tau_{v,r}$ , где  $T$  — суммарная кинетическая энергия звезд с расстояниями  $r \leq 0.5R_t$  от центра скопления,  $\tau_{v,r}$  — начальное время бурной релаксации модели скопления, принятое равным  $\tau_{v,r} \simeq 2.6\bar{t}_{cr}$  согласно оценкам [9],  $\bar{t}_{cr}$  — среднее начальное время пересечения звездой скопления,  $R_t$  — приливный радиус скопления [10], величины  $\tau_{v,r}$  и  $t_{cr}$  получены по данным о начальных параметрах моделей РЗС. В работе [7] обнаружены признаки слабой турбулентности в движениях звезд ядра модели 1 скопления с наибольшим значением  $\dot{T}$  и наибольшей степенью нестационарности в регулярном поле (для этой модели  $\dot{T} \simeq (1.6 \pm 0.2)T/\tau_{v,r}$ , что в  $8.1 \pm 1.5$  раза больше скорости нагрева ядра звездными сближениями). Корреляционные функции в работе [7] получены по данным численных экспериментов для динамических моделей РЗС [11].

Представляет интерес теоретическое изучение турбулентности движений звезд в РЗС (и в их моделях). Однако, такому исследованию должно предшествовать изучение полного спектра колебаний таких систем и анализ неустойчивости этих колебаний, выявление всех (или большинства) неустойчивостей колебаний в моделях РЗС (для колебаний в плазме — см. [12, 13]; согласно [12], основным критерием турбулентности плазмы является уширение спектра колебаний, хаотизация их амплитуд и фаз и наличие потока энергии по спектру). В настоящее время столь полная информация о динамике моделей РЗС отсутствует. Отметим, что в теоретических работах [3, 14–17] и др. при изучении пространственно неоднородных звездных систем используются дифференциальные уравнения для одночастичных функций распределения и двухчастичных корреляционных функций. При записи таких уравнений обычно используются разные упрощающие предположения. За исключением [7], работы с вычислениями корреляционных функций по данным численных экспериментов для динамических моделей РЗС отсутствуют. На наш взгляд, это связано с экспоненциальной неустойчивостью траекторий звезд в таких системах [18, 19] и низкой точностью интегрирования уравнений движения звезд на достаточно больших промежутках времени [20]. Обычно при интегрировании используются разностные схемы, порядок точности которых не превышает 4, см. [18–20].

Расчеты фазовых координат звезд (ФКЗ) моделей РЗС в работе [11] были выполнены путем интегрирования уравнений движения звезд с использованием разностных схем 10-го и 11-го порядков точности на интервале времени  $t \in [0, t_m]$ ,

где  $t_m \simeq 5.1\tau_{v,r}$ . Пусть  $t_0$  — промежуток времени динамической эволюции модели РЗС, в течение которого выполняется статистический критерий точности вычислений фазовой плотности [21]. Вблизи центров моделей РЗС [11] величина  $t_0/\tau_{v,r} \simeq 3.0-3.9$ , а на периферии моделей  $t_0/\tau_{v,r} \simeq 3.6-5.1$ . Максимальная относительная погрешность вычисления энергии скопления, достигнутая на промежутке времени  $t_m$  в моделях [11], по модулю составляла  $(1-4) \times 10^{-13}$ , а точность вычисления функции фазовой плотности (ФФП) скопления на промежутке времени  $t_0$  можно считать достаточной для выводов о статистических свойствах ФФП. При  $t \in [0, t_0]$  точность полученных в [7] распределений корреляций оказывается достаточной для выводов о свойствах этих распределений. Согласно [7], сравнение между собой исследуемых распределений или зависимостей (например, спектров колебаний или дисперсионных кривых), полученных методами 10 и 11 порядков точности, также дает эффективный метод контроля результатов вычислений, см. ниже.

Представляют интерес оценки времени корреляции  $\tau_c = \tau_c^{(f)}$  для величин  $f$  в моделях РЗС [11]. Такие оценки в работе [7] не проводились, т.к. двухвременные корреляции величин  $f$  в ней не вычислялись. Величины  $\tau_c^{(f)}$  могут быть использованы для вычисления средней фазовой скорости  $v_f$  распространения колебаний значений  $f$  в моделях РЗС (см., напр., [12, 13]). Представляет интерес также определение средних фазовых скоростей  $v_r, v_v$  колебаний в пространствах величин  $r, v$  в моделях РЗС по данным работы [7] о величинах  $\tau_c$  и  $r_c$ . Такие оценки для моделей РЗС ранее не проводились.

После работы [22], анализ неустойчивости движений в задаче многих тел проводился в ряде работ (см., например, [23–25]). Для систем, близких к состоянию устойчивого динамического равновесия [18], экспоненциальная неустойчивость траекторий звезд приводит к росту энтропии системы [26], стр. 105, [27], стр. 506.

Расхождение близких траекторий в нестационарных звездных системах и влияние коллективных эффектов на траектории звезд разными методами изучалось в работах [23–25], [28–30]. В работах [23–25, 29] в рамках “геометрического” подхода для эллиптических галактик получены оценки времени  $\tau_{v,r} \sim \bar{t}_{cr}$ . В работе [29] для получения таких оценок используется теорема о вириале и предположение о близости таких систем к состоянию устойчивого равновесия. Теоретические оценки [23–25, 29] величины  $\tau_{v,r} \sim \bar{t}_{cr}$  подтверждены с использованием численных экспериментов в работах [31, 32] и др. В работе [30] исследовались

максимальные характеристические показатели  $\lambda$  Ляпунова траекторий звезд для моделей РЗС с разной степенью нестационарности и было показано, что средние по всем траекториям звезд модели значения  $\lambda$  убывают при переходе от моделей со средней степенью нестационарности к более нестационарным моделям, что указывает на уменьшение стохастичности движений звезд в сильно нестационарных системах.

Динамика бесстолкновительных гравитирующих систем с распределением фазовой плотности  $f_0$  вблизи зависящего от времени состояния неустойчивого равновесия теоретически обсуждалась в работе [33]. В таких системах должны иметь место колебания  $\delta f$  фазовой плотности  $f$  относительно распределения  $f_0$ , соответствующего седловой точке, связанной с локальным экстремумом энергии  $H(f_0)$  среднего поля системы (в этом случае величина  $H(f) - H(f_0)$  возрастает для одних  $\delta f$  и убывает для других  $\delta f$ , см. анализ формулы (18) из [33]).

В моделях РЗС, в разной степени близких к состоянию неустойчивого равновесия [34], корреляции в расположениях звезд в фазовом пространстве со временем могут нарастать, а энтропия в этих случаях убывает [7]. В моделях РЗС из-за их малой плотности и действия внешнего поля Галактики существуют и доминируют очень малоизученные многочисленные неустойчивости коллективных движений звезд, см. ниже. Среди таких неустойчивостей в настоящее время теоретически изучена лишь одна, связанная с гомологичными колебаниями ядер РЗС [35]. При таких колебаниях плотность массы  $\rho$  в сферической звездной системе может быть представлена в виде  $\rho(r, t) = \rho_1(r)\rho_2(t)$ . Изучение неустойчивостей колебаний РЗС и их моделей позволит в дальнейшем найти механизмы развития этих неустойчивостей, позволит провести их классификацию (джинсовские, неджинсовские, пучковые, градиентные и другие [36], в некоторых случаях сходные с плазменными). Неустойчивости коллективных движений звезд определяют как иррегулярную структуру РЗС (более иррегулярную, чем в шаровых скоплениях), так и динамическую эволюцию РЗС (развитие нестационарности в регулярном поле, развитие турбулентности в движениях звезд из-за взаимодействия различных мод колебаний, формирование и рост поляризационных облаков в моделях РЗС и др.). В этой связи, представляет интерес исследование колебаний фазовой плотности в РЗС и анализ неустойчивости этих колебаний.

Согласно [12, 13], взаимные корреляционные функции флуктуаций ряда характеристик плазмы в двух точках на расстоянии  $r$  друг от друга могут быть использованы для построения дисперсионных кривых и анализа неустойчивостей колебаний

в плазме. Представляет интерес использование такого метода для построения частотных спектров (спектров мощности) и исследования ряда неустойчивостей колебаний величин  $f$  в моделях РЗС. Такие исследования моделей РЗС раньше не проводились. Результаты такого исследования могут быть использованы как при обсуждении динамики моделей РЗС, так и при теоретическом описании динамических процессов в РЗС.

Целями данной работы являются: 1) вычисление и обсуждение величин  $\tau_c^{(f)}$ ,  $v_f$ ,  $v_r$ ,  $v_v$  для моделей РЗС [11], 2) вычисление двухвременных и взаимных корреляционных функций для флуктуаций фазовой плотности  $f$  в моделях РЗС, 3) вычисление частотных спектров и дисперсионных кривых для колебаний величин  $f$  в моделях РЗС, 4) использование полученных результатов для анализа динамики РЗС.

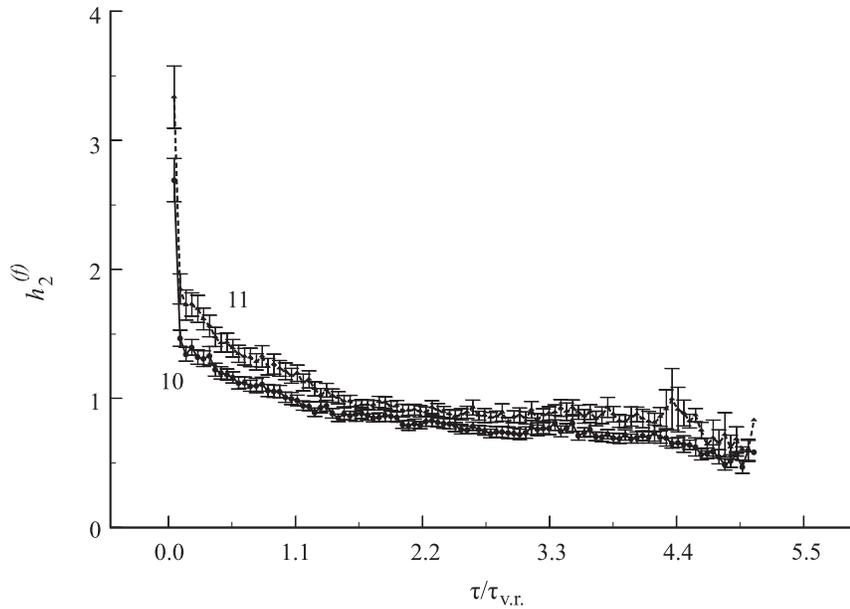
## 2. ОЦЕНКИ ВЕЛИЧИН $\tau_c^{(f)}$ , $v_f$ , $v_r$ , $v_v$ В МОДЕЛЯХ РЗС

В работе [11] рассмотрены модели скопления, состоящего из  $N = 500$  звезд с массами, равными солнечной, движущегося по круговой орбите радиуса  $R_G = 8200$  пк в плоскости Галактики вокруг её центра (использовалась модель потенциала Галактики [37]). Начальные параметры этих численных динамических моделей РЗС приведены в Таблице 1 работы [38]; модели 1–6 скоплений звезд в работах [11, 38] пронумерованы в порядке убывания степени нестационарности модели в регулярном поле. Каждая модель в исходном состоянии состоит из двух однородных по плотности сферических подсистем (ядро и гало) с совпадающими центрами масс.

Следуя Климонтовичу [39], стр. 136, а также обозначениям работы [7], для определения времени корреляции  $\tau_c^{(f)}$  в пространстве величин  $f$  рассмотрим двухвременную корреляцию:

$$g_2^{(f)}(t, t') = \overline{f(t)f(t')} - \overline{f(t)} \times \overline{f(t')}, \quad (1)$$

где черта сверху означает усреднение по всем звездам скопления,  $f(t)$  и  $f(t')$  — величины  $f$  в окрестностях одной и той же звезды в моменты времени  $t$  и  $t'$ . Остальные аргументы ( $\mathbf{r}, \mathbf{v}$ ) у функций  $f$  и  $g_2^{(f)}$  здесь для краткости не записаны. Как и в работе [7], оценки фазовой плотности  $f$  здесь были получены в окрестностях каждой звезды с учетом данных о фазовых координатах этой звезды и пяти звезд, ближайших к этой звезде. Пусть  $t' = t + \tau$  и  $\tau > 0$ . Подставляя  $t'$  в (1), усредняя функцию  $g_2^{(f)}(t, t + \tau)$  по моментам времени  $t \in [0, t_m - \tau]$ , находим функцию  $h_2^{(f)}(\tau)$  и её погрешности (при



**Рис. 1.** Зависимости величин  $h_2^{(f)}$  от  $\tau$  для модели 1 РЗС при  $\tau > 0$ . Цифрами 10 и 11 указан порядок точности ФКЗ, использованных для вычисления этих кривых.

$\tau < 0$  необходимо функцию  $g_2^{(f)}(t, t + \tau)$  усреднять по моментам времени  $t \in [-\tau, t_m]$ . График функции  $h_2^{(f)}(\tau)$  для модели 1 скопления при  $\tau > 0$  приведен на Рис. 1. Эта функция четная:  $h_2^{(f)}(\tau) = h_2^{(f)}(-\tau)$ , см. также в книге Бендата и Пирсола [40], стр. 58, поэтому её график при  $\tau < 0$  не приводится.

Как и в работе [7], будем считать временем корреляции  $\tau_c^{(f)}$  значение  $\tau$ , при котором  $h_2^{(f)}(\tau) = h_2^{(f)}(0)/e$ , где  $e$  — основание натурального логарифма. В этом случае для модели 1 скопления находим  $\tau_{c,11}^{(f)} = (0.98 \pm 0.14)\tau_{v.r.}$  при использовании ФКЗ, полученных методом 11-го порядка точности, и  $\tau_{c,10}^{(f)} = (1.09 \pm 0.16)\tau_{v.r.}$  при использовании ФКЗ 10-го порядка точности. Указанная здесь погрешность величины  $\tau_c^{(f)}$  обусловлена погрешностью вычисления функции  $h_2^{(f)}(\tau)$  при  $\tau = \tau_c^{(f)}$ . Оценки величин  $\tau_{c,11}^{(f)}$  и  $\tau_{c,10}^{(f)}$  статистически не различаются между собой. Для моделей 1–6 РЗС в Таблице 1 приведены оценки величин  $\tau_c^{(f)}$ , полученные с использованием ФКЗ 11-го порядка точности. Согласно Таблицам 1 этой работы и работы [11], величины  $\tau_c^{(f)}/\tau_{v.r.}$  и  $\tau_c^{(f)}$  убывают с увеличением номера модели и с уменьшением степени нестационарности модели скопления. Таким образом, корреляции в пространстве величин  $f$  наиболее быстро разрушаются в процессе эволюции модели 6. Учитывая данные

работы [7] о величинах  $\tau_c^{(r)}$  (время корреляции в пространстве  $r$ ), находим:  $\tau_c^{(f)} < \tau_c^{(r)}$  в моделях 1–6 РЗС. Отношение  $\tau_c^{(r)}/\tau_c^{(f)} = q$  возрастает от  $q \simeq 2.1$  в модели 1 до  $q \simeq 17.0$  в модели 6.

Согласно Волкову и др. [12] стр. 27, усредненную оценку фазовой скорости колебаний значений  $f$  можно получить из соотношения времени и радиуса корреляции  $v_f \simeq r_c^{(f)}/\tau_c^{(f)}$  (в пространствах величин  $r$  и  $v$  средние фазовые скорости  $v_r$  и  $v_v$  определяются аналогично). В Таблице 1 приведены величины  $v_f$ ,  $v_v$  и  $v_r$  (в пк/млн лет; 1 пк/млн лет  $\simeq 1$  км/сек), полученные с использованием ФКЗ 11-го порядка точности и с учетом данных о параметрах корреляций в моделях 1–6 из работы [7]. Из Таблицы 1 видно, что величины  $v_f$  и  $v_v$  в моделях 1–4 значительно (в 5–20 раз) меньше величин  $v_f$  и  $v_v$  в моделях 5, 6. В случае величин  $v_r$  таких больших различий между моделями не наблюдается. Возможно, такие различия величин  $v_f$  и  $v_v$  в моделях 1–4 и 5, 6 обусловлены большими длинами волн  $\lambda$  колебаний величин  $f$  и  $v$  в моделях 5, 6. Рассмотрим радиально распространяющуюся в модели скопления волну:  $\delta f \propto \exp(-i\varphi)$ , где  $\varphi = \omega t - k_r r$ ,  $\omega$  и  $k_r$  — частота колебаний значений  $f$  и соответствующее волновое число. Полагая  $\varphi = \text{const}$ ,  $\omega = 2\pi/P = \text{const}$ ,  $k_r = 2\pi/\lambda = \text{const}$ , дифференцируя  $\varphi$  по времени  $t$ , получим  $v_f = \frac{dr}{dt} = \omega/k = \lambda/P$ , где  $P$  — период колебаний. Периоды радиальных колебаний моделей 1–6 мало различаются между собой (см., напр.,

**Таблица 1.** Время корреляции  $\tau_c^{(f)}$ , начальное время бурной релаксации  $\tau_{v,r}$ , фазовые скорости распространения колебаний, среднеквадратичная скорость  $v_c$  движения звезд ядра в моделях РЗС

№	1	2	3	4	5	6
$\tau_c^{(f)}/\tau_{v,r}$	$0.98 \pm 0.14$	$0.60 \pm 0.05$	$0.52 \pm 0.03$	$0.64 \pm 0.06$	$0.14 \pm 0.02$	$0.10 \pm 0.01$
$\tau_{v,r}$ [11], млн лет	49.93	41.84	41.84	34.25	41.84	41.84
$v_f$ , пк/млн лет	$0.027 \pm 0.001$	$0.051 \pm 0.004$	$0.056 \pm 0.003$	$0.053 \pm 0.005$	$0.26 \pm 0.04$	$0.27 \pm 0.03$
$v_v$ , пк/млн лет	$0.012 \pm 0.001$	$0.013 \pm 0.001$	$0.021 \pm 0.005$	$0.063 \pm 0.007$	$0.17 \pm 0.01$	$0.26 \pm 0.02$
$v_r$ , пк/млн лет	$0.007 \pm 0.001$	$0.008 \pm 0.001$	$0.001 \pm 0.0001$	$0.011 \pm 0.002$	$0.009 \pm 0.002$	$0.010 \pm 0.001$
$v_c$ , пк/млн лет	$0.56 \pm 0.02$	$0.56 \pm 0.01$	$0.54 \pm 0.01$	$0.57 \pm 0.01$	$0.58 \pm 0.01$	$0.55 \pm 0.01$
$v_c/v_f$	$20.7 \pm 1.0$	$10.9 \pm 0.9$	$9.7 \pm 0.6$	$10.8 \pm 1.0$	$2.2 \pm 0.3$	$2.0 \pm 0.2$

Таблицу 2 из работы [30]). Поэтому различия длин волн  $\lambda$  колебаний величин  $f$  и  $v$  в моделях 1–4 и 5, 6 могут быть одной из причин различий  $v_f$  и  $v_v$  в этих моделях. Возможно, большие значения  $v_f$  и  $v_v$  в моделях 5, 6 связаны с наличием более протяженных и массивных ядер в этих моделях по сравнению с моделями 1–4. Кроме того, в модели 6 в периоды наибольших сжатий к плоскости Галактики формируется тороидальная структура с экваториальной плоскостью, близкой к плоскости Галактики с повышенной плотностью числа звезд внутри тора. В этой модели наблюдаются также волны уплотнения, распространяющиеся по ядру скопления от оси  $\zeta$ , проходящей через центр масс модели и перпендикулярной плоскости Галактики, со скоростью, сравнимой со средней скоростью пекулярных движений звезд [30]. Отметим, что малые значения  $v_f$  и  $v_v$  в моделях 1–4 могут быть результатом формирования и наложения нескольких встречных бегущих радиальных волн в этих моделях (в этом случае средняя фазовая скорость радиальных волн в скоплении может быть малой). В работах [41, 42] при численном интегрировании уравнений Власова были обнаружены и исследованы встречные радиальные потоки звезд, формирующиеся в нестационарной изолированной сферической системе с постоянной фазовой плотностью (модель типа “водяной мешок”). Такие потоки образуются в ядре системы в периоды ее сжатий и обусловлены периодическим движением области с нулевой фазовой плотностью внутри фазовой области, занятой системой. При этом вблизи центра системы периодически возникает возмущение плотности (область пониженной плотности), которое затем сносится потоком звезд на границу ядра

системы. Возможно, такие потоки звезд активнее формируются в моделях 1–4 РЗС с большей, чем в моделях 5, 6 степенью нестационарности, что влияет на оценки параметров корреляций  $r_c^{(f)}$  и  $\tau_c^{(f)}$ , а также на оценки величин  $v_f$  для моделей 1–4.

В Таблице 1 приведены полученные в работе [7] среднеквадратичные скорости  $v_c$  движения звезд ядра (в пак/млн лет) с расстояниями от центра  $r \leq 0.5R_t$ . Согласно этой Таблице, величины  $v_c$  в 10–20 раз больше величин  $v_f$  для моделей 1–4 и приблизительно в 2 раза больше величин  $v_f$  для моделей 5, 6. Таким образом, средние фазовые скорости колебаний величин  $f$ ,  $v$ ,  $r$  в моделях 1–6 РЗС достаточно малы в сравнении со среднеквадратичными скоростями  $v_c$  движения звезд ядра.

### 3. ВЗАИМНАЯ ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИЙ

Пусть  $X(t, \mathbf{r}) = f(t, \mathbf{r}) - \overline{f(t, \mathbf{r})}$ , где величина  $f$  получена по  $n_{st}$  звездам из окрестностей точки с координатой  $\mathbf{r}$  в модели скопления, а черта сверху означает усреднение по времени  $t \in [0, t_m]$  (начало системы координат  $\mathbf{r}$  совпадает с центром масс скопления,  $t_m$  — наибольшее значение  $t$ , используемое для расчета корреляций). Для краткости здесь аргумент  $\mathbf{v}$  у функций  $f$  и  $X$  не записан. Величина  $X$  обычно называется отклонением или флуктуацией (см. [12, 13]) и предполагается случайной переменной, образующей стационарный случайный процесс. Следуя [12, 13], запишем функцию авто-

корреляции

$$C_{xx}(\tau, \mathbf{r}) = \frac{1}{t_m} \int_0^{t_m} X(t, \mathbf{r}) X(t + \tau, \mathbf{r}) dt, \quad (2)$$

а также взаимную функцию корреляции флуктуаций величины  $f$

$$C_{xx}(\tau, \mathbf{r}, \Delta \mathbf{r}) = \frac{1}{t_m} \int_0^{t_m} X(t, \mathbf{r}) X(t + \tau, \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) dt. \quad (3)$$

В общем случае эти функции могут быть записаны в виде пределов по  $t_m$  при  $t_m \rightarrow \infty$  от выражений в правых частях соотношений (2) и (3). Здесь величина  $\tau$ , как и в предыдущем разделе нашей статьи, является временной задержкой.

Пусть  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ ,  $|\Delta \mathbf{r}| = r$ . В этом случае расстояния двух точек 1 и 2 от центра скопления равны 0 и  $r$ , соответственно. Следуя [13], функции (2), полученные по  $n_{st}$  звездам, ближайшим к каждой из точек 1 и 2, обозначим как  $C_{11}(\tau)$  и  $C_{22}(\tau)$  соответственно. Функцию (3) в этом случае обозначим как  $C_{12}(\tau, r)$ . Следуя методике [13], рассмотрим флуктуацию  $X$  в виде волнового пакета, распространяющегося в радиальном направлении относительно центра скопления:

$$X(t, r) = \int_0^{\infty} A(\omega) \exp(i(rk(\omega) - \omega t)) d\omega. \quad (4)$$

Здесь амплитуда  $A(\omega)$  и волновое число  $k(\omega)$  волн, составляющих пакет, зависят от частоты этих волн  $\omega$ . В случае (4) Фурье-преобразование функции  $C_{11}(\tau)$  (или  $C_{22}(\tau)$ ) равно функции  $F(\omega)$ , а Фурье-преобразование функции  $C_{12}(\tau, r)$  равно:

$$F_1(\omega) = F(\omega) \exp(ir k(\omega)),$$

см. также формулы (3.41) или (4.8)–(4.11) в книге Бендата, Пирсола [40]. Таким образом, рассматривая Фурье-преобразование функции  $C_{12}(\tau, r)$ , можно найти  $|F_1(\omega)| = F(\omega)$  (спектр частот) и  $\frac{1}{r} \text{Arg}(F_1(\omega)) = k(\omega)$  (дисперсионное соотношение).  $r k(\omega) \in [-\pi/2, \pi/2]$  — фаза колебания  $f$  с частотой  $\omega$ .

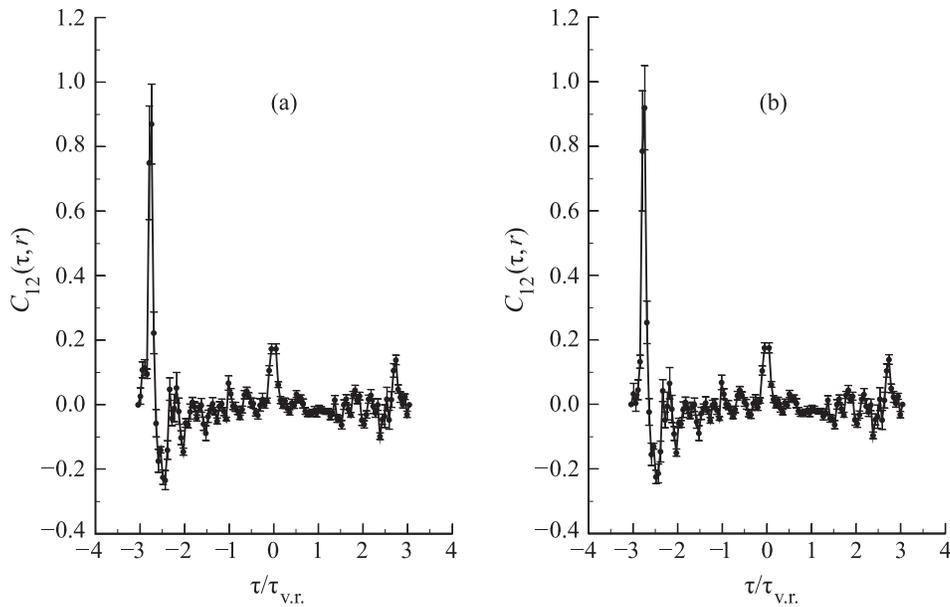
В данной работе были рассмотрены ряд положений точки 2 на сфере радиуса  $r$  с центром в центре масс скопления. Для этого в сферической системе координат  $(r, \theta, \phi)$  с шагом  $\Delta \theta = \Delta \phi = \pi/(4k)$  были заданы координаты этих точек при  $k = 1, 2, 4$ , выполнен переход к правой декартовой прямоугольной системе координат  $(\xi, \eta, \zeta)$  с началом в центре масс скопления (ось  $\zeta$  направлена перпендикулярно плоскости Галактики, ось  $\xi$  — от центра Галактики в плоскости

Галактики, а ось  $\eta$  — в направлении движения скопления в плоскости Галактики). Вместе с точкой 1 общее число точек  $n_p$  в окрестностях которых рассматриваются флуктуации  $X$  равно  $n_p = 27, 115, 483$  при  $k = 1, 2, 4$ , соответственно.

Графики средних значений функции  $C_{12}(\tau, r)$  в модели 1 при  $r = 1$  пк,  $n_{st} = 30$ ,  $n_p = 27$  в случае  $t_m = t_0$ , где  $t_0 \simeq 3\tau_{v.r.}$  приведены на Рис. 2. Усреднение величин  $C_{12}(\tau, r)$  выполнено по 26 значениям  $C_{12}(\tau, r)$ , соответствующим разным положениям точки 2 на сфере радиуса  $r = 1$  пк. Вертикальными барами на Рис. 2 показаны погрешности соответствующих средних значений  $C_{12}(\tau, r)$ . При построении Рис. 2а и 2б использовались ФКЗ 11-го и 10-го порядков точности соответственно. Различия кривых  $C_{12}(\tau, r)$ , полученных в 11-м и в 10-м порядках точности, на Рис. 2 заметны меньше, чем различия кривых  $h_2^{(f)}$  на Рис. 1, что обусловлено использованием меньших значений  $t_m$ , чем для Рис. 1 (при вычислении кривых на Рис. 2 использовались лишь ФКЗ, полученные при  $t \leq t_0$ ; усреднение величин  $f$  и  $X(t, \mathbf{r})X(t + \tau, \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r})$  в (3) по  $t$  проводилось в интервалах:  $t \in [0, t_0 - \tau]$  при  $\tau > 0$  и  $t \in [-\tau, t_0]$  при  $\tau < 0$ ). Различия кривых  $C_{12}(\tau, r)$ , полученных в 11-м и 10-м порядках точности, как правило, меньше или значительно меньше указанных на Рис. 2 погрешностей величин  $C_{12}(\tau, r)$ , и эти различия убывают с уменьшением  $|\tau|$ . Отметим значительную несимметричность функции  $C_{12}(\tau, r)$  относительно  $\tau = 0$ , поэтому спектр частот задается не только действительной частью преобразования Фурье для функции  $C_{12}(\tau, r)$ , см. [40], стр. 61. На Рис. 2 заметен ряд локальных экстремумов функции  $C_{12}(\tau, r)$ , выходящих за пределы погрешностей величин  $C_{12}(\tau, r)$  в точках  $\tau_j = P_j$ , что указывает на существование повышенных взаимных корреляций (разного знака) между колебаниями  $f$  с периодами  $P_j$  в окрестностях точек 1 и 2.

#### 4. ЧАСТОТНЫЕ СПЕКТРЫ И ДИСПЕРСИОННЫЕ КРИВЫЕ

Для вычисления спектров частот и дисперсионных кривых флуктуаций величины  $f$  в моделях 1–6 РЗС мы использовали программу быстрого преобразования Фурье (БПФ) из книги Грея [43], стр. 483. Вместо круговых частот  $\omega$  здесь удобнее использовать циклические частоты  $\nu = \omega/(2\pi)$ . В этом случае комплексно-сопряженные пары корней  $\nu_j = \nu_{re,j} \pm i\nu_{im,j}$  уравнения  $k_\nu^{(0)} = 0$  позволяют определить период  $P_j = 1/\nu_{re,j}$  и время  $t_j = 1/(2\pi\nu_{im,j})$  нарастания неустойчивости колебаний  $f$ . Отдельно вычислялись Фурье-преобразования  $\mathcal{F}_1(\nu)$  и  $\sigma_{\mathcal{F}}(\nu)$  для средних величин



**Рис. 2.** Взаимная корреляционная функция в модели 1 РЗС;  $r = 1$  пк,  $n_{st} = 30$ ,  $n_p = 27$ . (a) и (b) построены с использованием ФКЗ 11-го и 10-го порядков точности соответственно.

$C_{12}(\tau, r)$  и их погрешностей  $\sigma_C(\tau, r)$ . Затем вычислялись относительные фазы (волновые числа) флуктуаций величины  $f$ :  $k_\nu^{(0)} = \frac{1}{r} \text{Arg}(\mathcal{F}_1(\nu))$  и  $k_\nu^{(1,2)} = \frac{1}{r} \text{Arg}(\mathcal{F}_1(\nu) \pm \sigma_{\mathcal{F}}(\nu))$ . Функции  $k_\nu^{(0,1,2)}$  использовались для оценки частот  $\nu$  и их погрешностей.

На Рис. 3 приведен график функции  $S_\nu = |\mathcal{F}_1(\nu)|/\tau_{v.g.}$ , полученный для модели 1 по данным о средних значениях функции  $C_{12}(\tau, r)$  и погрешностях этих средних значений. Величины  $S_\nu$  на Рис. 3 приведены в млн лет<sup>6</sup>/пк<sup>12</sup>; здесь и далее величина  $\nu$  принята равной числу колебаний величины  $f$  за время  $\tau_{v.g.}$ . Ряд локальных максимумов функции  $S_\nu$ , превышающих погрешности  $S_\nu$  и связанных с локальными экстремумами функции  $C_{12}(\tau, r)$ , можно заметить на зависимости  $S_\nu$  от  $\nu$ . При  $\nu \in [0.5, 2.4]$  (область низких частот) величины  $S_\nu$  в 2–3 раза больше, чем при  $\nu \in [2.6, 5.2]$  (средние частоты). При бóльших значениях  $\nu$  величины  $S_\nu$  убывают. По Рис. 3 видно, что наибольший вклад в среднюю мощность колебаний  $f$  (см., например, [12]) вносят низкие частоты  $\nu \in [0.5, 2.4]$ , соответствующие колебаниям ядра и всего скопления в целом. Частоты локальных максимумов  $S_\nu$  из области средних частот приблизительно в два (иногда в три) раза больше частот соответствующих локальных максимумов  $S_\nu$  из области низких частот, что указывает на возникновение резонансов между колебаниями  $f$  с разными частотами  $\nu$  на формирование  $S_\nu$  в модели 1 (возможно, передача энергии колебаний  $f$

от низких частот к высоким, в область колебаний с малыми амплитудами, имеет резонансный характер). Точки локальных максимумов  $S_\nu$  соответствуют как устойчивым (например,  $\nu \simeq 1.85, 3.35$  на Рис. 3, 4), так и неустойчивым колебаниям  $f$  ( $\nu \simeq 1.13, 1.36, 4.41$ , на Рис. 3, 4). Наличие локальных максимумов на кривой  $S_\nu$  указывает на повышенные мощность и интенсивность возбуждения колебаний  $f$  с частотами из окрестностей точек этих локальных максимумов в модели 1. Кривые  $S_\nu = S_\nu^{(10)}$  и  $S_\nu = S_\nu^{(11)}$ , полученные при  $t_m = t_0$  для моделей РЗС по данным о ФКЗ 10-го и 11-го порядков точности, соответственно, практически не различаются между собой. Частоты  $\nu$  соответствующих локальных максимумов  $S_\nu^{(10)}$  и  $S_\nu^{(11)}$  совпадают, а средние по всем значениям  $\nu$  величины  $|S_\nu^{(10)} - S_\nu^{(11)}|/S_\nu^{(11)}$  приблизительно в 1.9 раз меньше средних по всем  $\nu$  величин  $\sigma(S_\nu)/S_\nu^{(11)}$ , где  $\sigma(S_\nu)$  — погрешности величин  $S_\nu^{(11)}$ , указанные вертикальными барами на Рис. 3. Поэтому точность используемых ФКЗ можно считать достаточной для построения и анализа кривых  $S_\nu$ .

Пусть  $\bar{S}_\nu$  — среднее значение  $S_\nu^{(11)}$  в области малых  $\nu$ , соответствующих частотам колебаний ядра скопления, а  $\Delta S_\nu$  — средняя разница между максимальными и минимальными значениями  $S_\nu^{(11)}$  в этой области значений  $\nu$ . Начальные отношения радиусов ядра и гало в моделях 1, 2, 4 скопления одинаковы, количество звезд в ядрах

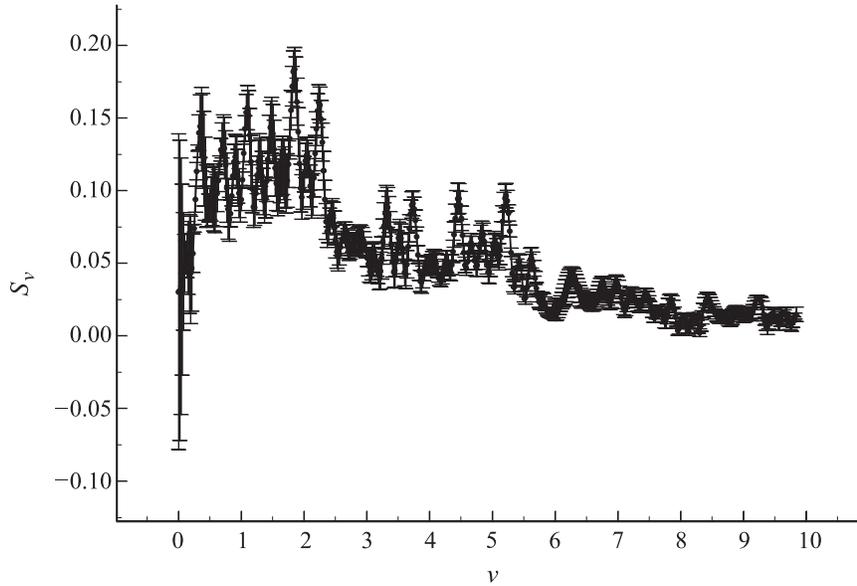


Рис. 3. Зависимость  $S_\nu$  от  $\nu$  для модели 1 РЗС;  $r = 1$  пк,  $n_{st} = 30$ ,  $n_p = 27$ .

этих моделей равны  $N_1 = 100$ , а плотность этих моделей возрастает от первой к четвертой модели (начальные числа звезд в моделях одинаковые, а начальные радиусы моделей 1, 2, 4 убывают с увеличением номера модели). В моделях 2, 3, 5, 6 скоплений начальное число звезд в ядре и размер ядра возрастают от модели 2 к модели 6 ( $N_1 = 400$ ) при одинаковых начальных радиусах гало (см., например, Таблицу 1 из работы [38]). Величины  $\overline{S}'_\nu = \overline{S}_\nu \tau_{v,r}$  и  $\Delta S'_\nu = \Delta S_\nu \tau_{v,r}$  (в млн лет<sup>7</sup>/пк<sup>12</sup>) для моделей 1, 2, 4 получены равными  $\overline{S}'_\nu = 5.8 \pm 0.4$ ,  $2.3 \pm 0.7$ ,  $3.3 \pm 0.7$  и  $\Delta S'_\nu = 2.9 \pm 0.3$ ,  $2.0 \pm 0.6$ ,  $2.3 \pm 0.6$  соответственно. С увеличением размеров и массы ядра в моделях 2, 3, 5, 6 величины  $\overline{S}'_\nu$  и  $\Delta S'_\nu$  убывают приблизительно в 15 и 14 раз соответственно (при переходе от модели 2 к модели 6). Таким образом, изменение начальной плотности модели скопления сравнительно слабо влияет на величины  $\overline{S}'_\nu$  и  $\Delta S'_\nu$ , а увеличение размеров и массы ядра модели скопления значительно уменьшает величины  $\overline{S}'_\nu$  и  $\Delta S'_\nu$ . Пусть  $\overline{\Delta\nu}_i$  — среднее расстояние между точками соседних локальных максимумов функции  $S_\nu^{(11)}$  в области малых  $\nu$ , соответствующих наибольшим значениям  $S_\nu^{(11)}$  и частотам колебаний ядра  $i$ -й модели скопления. Величины  $\overline{\Delta\nu}_i$  в моделях 1, 2, 4 возрастают с увеличением плотности скопления:  $\overline{\Delta\nu}_2/\overline{\Delta\nu}_1 = 1.71 \pm 0.13$ ,  $\overline{\Delta\nu}_4/\overline{\Delta\nu}_1 = 2.80 \pm 0.65$ . Количество локальных максимумов функций  $S_\nu^{(11)}$  в низкочастотных областях спектров с большими значениями  $S_\nu^{(11)}$  убывает (в два раза) с увели-

чением плотности моделей РЗС (при переходе от модели 1 к модели 4). Вероятно, большая степень нестационарности модели 1 по сравнению с другими моделями обеспечивается большими значениями  $\overline{S}'_\nu$ , большим числом локальных максимумов функции  $S_\nu^{(11)}$  и большей плотностью их расположения в низкочастотной области спектра.

На Рис. 4 приведены зависимости  $k_\nu = k_\nu^{(0)}$  от  $\nu$  для модели 1, полученные для функции  $C_{12}(\tau, r)$ , изображённой на Рис. 2а. Использовались значения  $n_p = 27, 483$ . Изменяя в широких пределах значения  $n_{st}$  и  $n_p$ , можно ослабить влияние случайного шума на форму зависимости  $k_\nu$  от  $\nu$  в разных интервалах частот  $\nu$  (см., например, почти вертикальные линии вблизи  $\nu \simeq 2.5$  на Рис. 4а и 4б). При этом форма и положение “синусоидальных” участков зависимостей  $k_\nu$  от  $\nu$ , связанных с неустойчивостями колебаний  $f$ , практически не меняются. Чем дальше такие участки находятся от линии  $k_\nu = 0$ , тем больше скорость нарастания таких неустойчивостей (в этих случаях корни уравнения  $k_\nu = 0$  комплексно-сопряженные). Например, “синусоидальному” участку кривой  $k_\nu$  вблизи  $\nu \simeq 1.1-1.5$  соответствуют две пары комплексно-сопряженных частот  $\nu$  (периоды колебаний  $P_5, P_6$  и времена нарастания неустойчивости  $t_5, t_6$  для этих корней приведены в Таблице 2; пара комплексно-сопряженных частот, соответствующая величинам  $P_6, t_6$ , для модели 1 была найдена в рамках линейного анализа неустойчивости колебаний  $f$  в ядре скопления [35]). Пересечение кривой зависимости  $k_\nu$  от  $\nu$  линии  $k_\nu = 0$  соответствует действительным частотам  $\nu$  колебаний  $f$  (если при этом не

происходит скачкообразное изменение фазы  $r k_\nu$  от  $\mp\pi/2$  до  $\pm\pi/2$ ; в этом случае действительная часть Фурье-преобразования функции  $C_{12}(\tau, r)$  достигает значения 0 в окрестности соответствующего значения  $\nu$ ; такие изменения фазы могут быть вызваны как регулярными (не случайными) изменениями  $C_{12}(\tau, r)$  с увеличением  $\nu$ , так и случайным шумом в оценках величин  $C_{12}(\tau, r)$ ). В Таблице 2 приведены величины  $P_j$  и  $t_j$  (в долях времени  $\tau_{v.r.}$ ) для колебаний  $f$  с наибольшими инкрементами нарастания неустойчивости в рассмотренных интервалах значений  $\nu$  в моделях 1–6 РЗС. Величины  $P_j$  и  $t_j$ , указанные в Таблице 2 нашей работы, получены с использованием ФКЗ 11-го порядка точности. Для модели 1 приведены данные о 17 парах таких корней при  $r = 1$  пк. Общее число  $n_c$  пар корней в этой модели при  $r = 1$  пк достигает 41–42. С увеличением  $r$  величина  $n_c$  в модели 1 меняется. При  $r = 2$  пк находим  $n_c = 32$ –33; при  $r = 3$  пк  $n_c = 42$ ; при  $r = 5$  пк  $n_c = 32$ , а при  $r = 9$  пк находим  $n_c = 22$ . Величины  $P_j$  и  $t_j$ , указанные для моделей 1–6 в Таблице 2, определялись путем аппроксимации соответствующего данному корню  $\nu_j$  участка дисперсионной кривой полиномами 3–7 порядков; затем численно находились корни этого полинома и комплексно-сопряженные пары корней использовались для вычисления  $P_j$  и  $t_j$ .

Возможно, степень неустойчивости моделей РЗС на разных расстояниях от центра скопления связана с количеством комплексно-сопряженных пар корней уравнения  $k_\nu = 0$ . В этом случае определенную роль в формировании областей неустойчивости на разных расстояниях от центра модели скопления могут играть резонансы между частотой орбитального движения скопления в Галактике и частотами собственных колебаний фазовой плотности в моделях скоплений (см. также работу [34]).

При записи величин  $P_j$  и  $t_j$  в Таблице 2 использовались следующие обозначения. Если величина  $P_j$ , полученная по данным о  $k_\nu^{(0)}$ , находится на границе интервала значений  $P_j$ , полученных по данным о  $k_\nu^{(0,1,2)}$ , то в Таблице 2 она приведена в скобках со штрихом с той стороны интервала, где указано её значение. Если величина  $P_j$ , полученная по данным о  $k_\nu^{(0)}$ , находится внутри интервала значений  $P_j$ , полученных по данным о  $k_\nu^{(1,2)}$ , то в Таблице 2 она приведена как  $P_j \pm \sigma(P_j)$ , где  $\sigma(P_j)$  — среднее отклонение от  $P_j$ , полученное по данным о  $k_\nu^{(1,2)}$ . В тех интервалах значений  $\nu$ , где влияние случайного шума в  $k_\nu^{(0)}$ , вызванного случайными колебаниями средних величин  $C_{12}(\tau, r)$ , подавить изменениями  $n_p$  и  $n_{st}$  не удается, для выделения

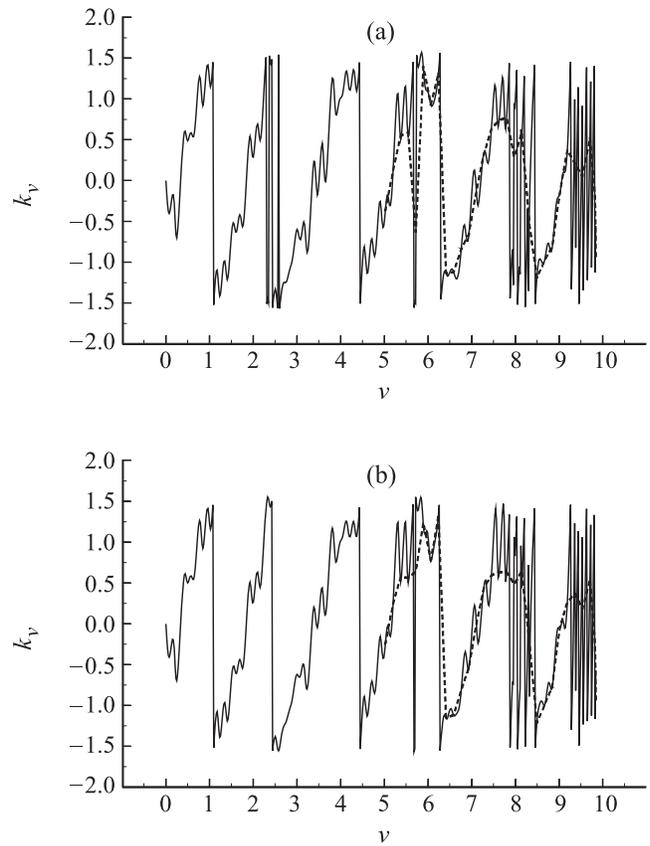


Рис. 4. Дисперсионные кривые колебаний величин  $f$  для модели 1 РЗС при  $r = 1$  пк,  $n_{st} = 30$ . (а) кривая получена при  $n_p = 27$ , (б) то же при  $n_p = 483$ .

сигнала на уровне шума используется сглаживание зависимостей  $k_\nu$  от  $\nu$  методом локально взвешенной регрессии [44]. Сглаженные таким способом кривые  $k_\nu$  при  $\nu > 5$  на Рис. 4 показаны пунктирной линией. Значения  $P_j$  и  $t_j$ , полученные с помощью таких сглаженных кривых  $k_\nu$ , помечены в Таблице 2 знаком “:”.

Дисперсионные кривые, полученные при  $t_m = t_0$  для моделей РЗС по данным о ФКЗ 10-го порядка точности, практически не отличаются от дисперсионных кривых 11-го порядка точности. Величины  $P_j$ ,  $t_j$ , полученные с помощью дисперсионных кривых 10-го и 11-го порядков точности ( $P_j^{(10)}$ ,  $t_j^{(10)}$  и  $P_j^{(11)}$ ,  $t_j^{(11)}$ ), хорошо согласуются между собой. Для сравнения величин  $P_j^{(10)}$  и  $P_j^{(11)}$ ,  $t_j^{(10)}$  и  $t_j^{(11)}$  для модели 1 в нашей работе были выбраны несколько частот  $\nu_j$  неустойчивых колебаний  $f$  из разных частей рассмотренного на Рис. 4 интервала частот  $\nu$  (принятые значения  $j = 5, 6, 10, 14, 16$  соответствуют величинам  $P_j$ ,  $t_j$  из Таблицы 2 для модели 1). Пусть  $\Delta P = \overline{\Delta P_j}$  и  $\Delta t = \overline{\Delta t_j}$  —

Таблица 2. Параметры неустойчивых колебаний величин  $f$  в моделях РЗС (величины  $P_j$  и  $t_j$  приведены в долях времени  $\tau_{\text{г.}}$ )

№	1	2	3	4	5	6
$P_1$	'(6.5–7.3)	1.7 ± 0.1	1.19 ± 0.03	5.0 ± 0.2	'(1.26–1.36)	*0.895 ± 0.007
$t_1$	'(4.0–5.7)	1.7 ± 0.1	1.7 ± 0.3	2.1 ± 0.7	1.5 ± 0.5	3.2 ± 1.3
$P_2$	'(3.0–3.5)	1.6 ± 0.1	*0.93 ± 0.03	'(2.548–2.550)	1.01 ± 0.03	0.749 ± 0.003
$t_2$	(4.0–10.0)ʹ	1.8 ± 0.2	1.7 ± 0.5	1.5 ± 0.3	1.3 ± 0.4	2.5 ± 0.3
$P_3$	1.19 ± 0.01	*1.00 ± 0.02	0.830 ± 0.007	1.90 ± 0.09	*0.849 ± 0.001	0.6614 ± 0.0003
$t_3$	1.75 ± 0.25	2.2 ± 0.4	(1.7–1.9)ʹ	3.5 ± 0.3	2.4 ± 0.6	2.28 ± 0.09
$P_4$	0.94 ± 0.01	0.594 ± 0.004	'(0.69–0.71)	*1.47 ± 0.08	0.72 ± 0.01	0.5741 ± 0.0002
$t_4$	(2.0–2.6)ʹ	1.13 ± 0.09	(1.1–2.4)ʹ	2.25 ± 0.13	2.1 ± 0.3	2.9 ± 0.1
$P_5$	0.89 ± 0.01	0.541 ± 0.003	0.65 ± 0.01	0.905 ± 0.003	0.612 ± 0.003	'(0.285–0.294)
$t_5$	(2.51–2.57)ʹ	2.9 ± 0.9	'(1.17–1.30)	1.32 ± 0.06	3.1 ± 0.2	1.6 ± 0.3
$P_6$	* (0.73–0.74)ʹ	0.496 ± 0.002	(0.562–0.563)ʹ	0.578 ± 0.014	0.529 ± 0.003	(0.268–0.271)ʹ
$t_6$	1.63 ± 0.05	2.4 ± 0.5	1.8 ± 0.5	1.7 ± 0.9	2.3 ± 0.3	(1.55–1.77)ʹ
$P_7$	'(0.410–0.411)	0.2738 ± 0.0004	0.484 ± 0.005	0.500 ± 0.001	0.417 ± 0.001	(0.258–0.259)ʹ
$t_7$	1.43 ± 0.07	2.0 ± 1.5	1.8 ± 0.5	1.27 ± 0.03	1.84 ± 0.11	'(1.0–1.3)
$P_8$	'(0.4078–0.4082)	0.213 ± 0.004	0.449 ± 0.001	0.21942 ± 0.00003	0.1984 ± 0.0003	(0.244–0.245)ʹ
$t_8$	1.14 ± 0.07	1.8 ± 0.5	1.4 ± 0.1	2.22 ± 0.01	1.36 ± 0.02	'(1.3–1.5)
$P_9$	0.2271 ± 0.0002	0.1631 ± 0.0001	0.32764 ± 0.00002	0.20594 ± 0.00005	0.13572 ± 0.00002	'(0.1681–0.1683)
$t_9$	(1.55–1.61)ʹ	2.2 ± 0.3	1.5368 ± 0.0003	3.7 ± 0.3	1.82 ± 0.08	2.7 ± 0.8
$P_{10}$	'(0.2214–0.2215)	0.1429 ± 0.0003	0.2643 ± 0.0001	0.3024 ± 0.0004	0.13129 ± 0.00002	0.1634 ± 0.0002
$t_{10}$	2.14 ± 0.14	2.3 ± 0.5	1.41 ± 0.01	1.01 ± 0.04	3.3 ± 0.6	2.4 ± 0.2
$P_{11}$	0.17923 ± 0.00004	0.1182 ± 0.0004	0.25128 ± 0.00005	0.1574 ± 0.0001	0.12342 ± 0.00007	(0.145–0.146)ʹ
$t_{11}$	2.49 ± 0.07	'(1.4–4.1)	3.0 ± 0.1	1.22 ± 0.03	1.8 ± 0.2	(1.5–1.9)ʹ

Таблица 2. (Продолжение)

№	1	2	3	4	5	6
$P_{12}$	$(0.170-0.175)^\gamma$	$0.1067 \pm 0.0001$	$0.198 \pm 0.002$	$(0.12156-0.12158)^\gamma$	$0.1200 \pm 0.0006$	$0.098683 \pm 0.0000003$
$t_{12}$	$1.52 \pm 0.03$	$1.9 \pm 0.2$	$1.4 \pm 0.2$	$(1.89-1.92)^\gamma$	$2.4 \pm 1.0$	$2.5 \pm 0.1$
$P_{13}$	$0.1631 \pm 0.0001$	$0.1049 \pm 0.0003$	$0.19135 \pm 0.00004$	$0.11538 \pm 0.00005$	$0.1148 \pm 0.0002$	$0.09734 \pm 0.000001$
$t_{13}$	$0.85 \pm 0.01$	$2.4 \pm 0.9$	$1.45 \pm 0.02$	$2.26 \pm 0.06$	$2.3 \pm 0.5$	$(1.29-1.38)^\gamma$
$P_{14}$	$0.155 \pm 0.001$		$0.180929 \pm 0.000001$		$0.1014 \pm 0.0006$	$0.08963 \pm 0.000001$
$t_{14}$	$0.76 \pm 0.09$		$4.0 \pm 0.2$		$2.3 \pm 1.4$	$2.40 \pm 0.03$
$P_{15}$	$0.124 \pm 0.004$		$0.17296 \pm 0.00001$		$0.08844 \pm 0.00003$	$0.08876 \pm 0.00005$
$t_{15}$	$(0.44-0.98)^\gamma$		$2.20 \pm 0.03$		$2.1 \pm 0.3$	$1.5 \pm 0.1$
$P_{16}$	$0.1174 \pm 0.0004$		$0.13773 \pm 0.00002$			
$t_{16}$	$1.01 \pm 0.32$		$1.13 \pm 0.04$			
$P_{17}$	$(0.105-0.106)^\gamma$		$0.13324 \pm 0.00003$			
$t_{17}$	$(1.15-1.79)^\gamma$		$1.26 \pm 0.02$			
$P_{18}$			$0.12984 \pm 0.00005$			
$t_{18}$			$1.53 \pm 0.02$			
$P_{19}$			$0.1189 \pm 0.0002$			
$t_{19}$			$0.787 \pm 0.004$			
$P_{20}$			$0.11582 \pm 0.00005$			
$t_{20}$			$1.06 \pm 0.01$			
$P_{21}$			$0.09016 \pm 0.00001$			
$t_{21}$			$(1.82-1.84)^\gamma$			
$P_{22}$			$0.0871 \pm 0.0001$			
$t_{22}$			$1.0 \pm 0.2$			

средние по указанным значениям  $j$  величины  $\Delta P_j = |P_j^{(11)} - P_j^{(10)}|$  и  $\Delta t_j = |t_j^{(11)} - t_j^{(10)}|$ , а  $\sigma_P$  и  $\sigma_t$  — средние по этим  $j$  погрешности  $\sigma(P_j)$  и  $\sigma(t_j)$  величин  $P_j$  и  $t_j$  из Таблицы 2. Тогда  $\Delta P \simeq 0.68\sigma_P$ ,  $\Delta t \simeq 0.85\sigma_t$ , а  $(\Delta P_j)/P_j \simeq 0.002$ ,  $(\Delta t_j)/t_j \simeq 0.04$ . Таким образом, оценки величин  $P_j$  и  $t_j$ , полученные в 11-м и 10-м порядках точности, хорошо согласуются между собой, а точность используемых ФКЗ можно считать достаточной для построения и анализа дисперсионных кривых.

Согласно Таблице 2, для модели 1 величины  $P_6 = (36.4-36.9)$  млн лет и  $t_6 = 81.3 \pm 2.5$  млн лет (здесь использовано значение  $\tau_{v.r.} = 49.9$  млн лет, согласно [11]). Период  $P_\gamma$  и время  $t_\lambda$  развития неустойчивости колебаний  $f$ , полученные в линейном бесстолкновительном приближении при анализе колебаний  $f$ , связанных с гомологическими колебаниями ядра скопления, для этой модели составляют:  $P_\gamma = 37.4 \pm 1.8$  млн лет и  $t_\lambda = 53.7 \pm 2.9$  млн лет, см. столбцы 5 и 6 из Таблицы 2 работы [34]. Таким образом, оценки величин  $P_6$  и  $P_\gamma$  хорошо согласуются между собой. Величина  $t_6$  приблизительно в полтора раза больше, чем  $t_\lambda$ , что, вероятно, связано с нелинейностью колебаний величины  $f$  и действием звездных сближений на колебания  $f$  в ядре модели 1 (за время  $\Delta t \simeq t_\lambda$  и  $t_6$  звездные сближения успевают в некоторой степени “нагреть” область развития неустойчивости, что снижает ее скорость развития; начальное время релаксации модели скопления за счет звездных сближений составляет  $\tau_{st} = 121.9 \pm 12.2$  млн лет и  $\tau_{st} = 72.6 \pm 7.2$  млн лет для моделей 1 и 6 соответственно [45], Таблица 3; поэтому  $\Delta t < \tau_{st}$  для модели 1). В Таблице 2 знаком “\*” помечены пары значений  $P_j$  и  $t_j$ , наиболее близких к теоретическим оценкам  $P_\gamma$  и  $t_\lambda$  для моделей 1–6 (см. Таблицу 2, столбцы 4 и 5 в работе [34]). В среднем по моделям 1–6 для отмеченных знаком “\*” величин  $P_j$  и  $t_j$  находим:  $P_j = (1.09 \pm 0.06)P_\gamma$  и  $t_j = (1.56 \pm 0.18)t_\lambda$ .

Согласно Таблице 2, периоды неустойчивых колебаний в модели 1 составляют от  $P_1 \simeq 345$  млн лет до  $P_{17} \simeq 5.3$  млн лет.  $P_1 > P_G \simeq 222.1$  млн лет, где  $P_G$  — период обращения модели скопления вокруг центра Галактики (см., например, Таблицу 3 для моделей 1, 6 из работы [45]). Вероятно, в развитии колебаний модели 1 с периодами  $P_1$  и  $P_2$  заметную роль играет внешнее силовое поле Галактики; в развитии крупномасштабных колебаний с периодами  $P_3$ – $P_6$  большую роль играет регулярное силовое поле скопления. Колебания с периодами  $P_7$ – $P_8$  могут быть обусловлены негомологичностью колебаний модели 1 и её ядра (см. оценки частот гомологических и негомологических

колебаний эллипсоидальных моделей гало скопления в работе [35]). Колебания с малыми амплитудами и периодами  $P_9$ – $P_{17}$  могут быть обусловлены формированием поляризационных облаков, возникающих как отклик системы на прохождение в ней звезды, возникновением резонансов между колебаниями  $f$  на разных частотах (см. выше) или турбулентностью в движениях звезд в модели 1 скопления (см. [7]).

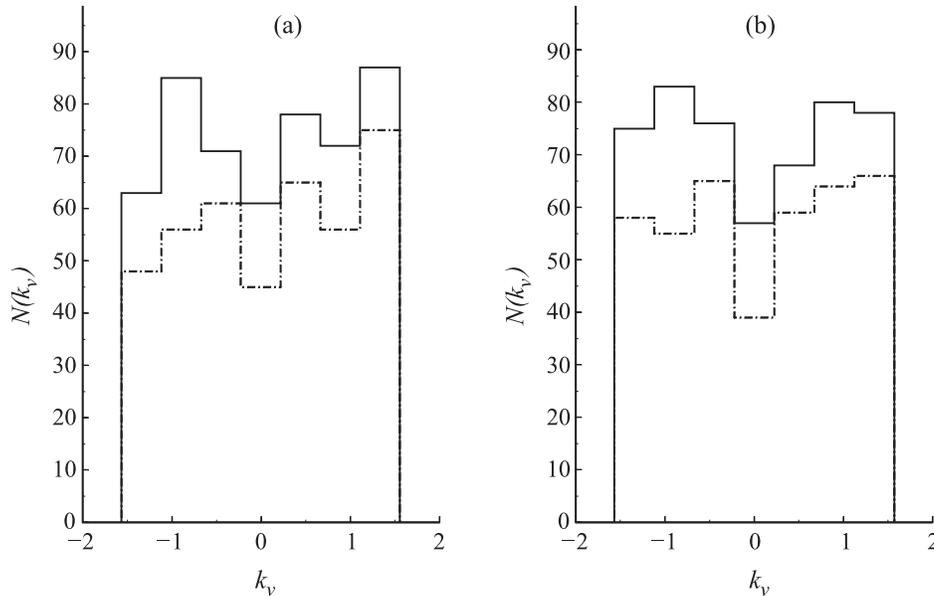
Отметим, что фазы  $rk_\nu$  неустойчивых колебаний величин  $f$  на Рис. 4 распределены достаточно равномерно вдоль оси  $k_\nu$ . Многократные изменения знака  $k_\nu$  в рассмотренном интервале частот на Рис. 4 указывают на формирование в модели 1 ряда встречных бегущих радиальных волн колебаний величин  $f$ . Подобные смены знака  $k_\nu$  наблюдаются и на дисперсионных кривых моделей 2–6 скопления.

На Рис. 5а, б приведены гистограммы распределений  $N(k_\nu)$  величин  $k_\nu$ , использованных при построении Рис. 4а, б, соответственно. Пунктирными линиями на Рис. 5 показаны гистограммы в случае  $\nu \leq 7.72$  (при этом исключаются из рассмотрения участки дисперсионных кривых, сильно искаженные влиянием случайного шума в  $k_\nu^{(0)}$ , вызванного случайными колебаниями средних величин  $C_{12}(\tau, r)$ ). Гистограммы  $N(k_\nu)$  для моделей 1–6 РЗС показывают достаточно равномерное распределение фаз колебаний величин  $f$ , что также указывает на формирование в моделях ряда встречных бегущих радиальных волн колебаний величин  $f$  и обеспечивает малые средние значения фазовых скоростей таких волн в моделях РЗС.

Наличие большого числа неустойчивых колебаний и повышенные мощность и интенсивность возбуждения таких колебаний в модели 1 (см. выше, а также [12]) можно рассматривать как аргументы в пользу турбулентности, развивающейся в ядре этой модели скопления.

Коллективные движения в РЗС и их неустойчивости определяют иррегулярность структуры таких скоплений. Широко известен ряд особенностей строения РЗС, указывающих на нестационарность этих скоплений в регулярном поле (иррегулярная форма ядер, не соответствующая равновесному состоянию РЗС, наличие ступенчатых структур в радиальных профилях плотности и др. [46–49]). Неустойчивости коллективных движений в них позволяют объяснить наблюдаемые в РЗС и их моделях структуры и динамические процессы (см. обсуждение динамической эволюции таких скоплений в [7, 34, 49]).

В последние несколько лет в работах по системам с дальнедействующими взаимодействиями активно обсуждаются наблюдаемые в моделях таких систем явления неполной бурной релаксации



**Рис. 5.** Гистограммы распределений  $N(k_\nu)$  для модели 1 РЗС при  $r = 1$  пк,  $n_{st} = 30$ . (а) получен при  $n_p = 27$ , (б) при  $n_p = 483$ . Штрих-пунктирными линиями показаны гистограммы при  $\nu \leq 7.72$ .

и метастабильного равновесия (QSS-квазистационарные состояния), см. [2, 3, 50, 51]. Согласно этим работам, причины появления таких состояний в подобных системах окончательно не ясны. В случае РЗС одной из возможных причин формирования метастабильных равновесных состояний является временное подавление неустойчивости радиальных колебаний ядра системы за счет его “нагрева” колебаниями регулярного поля скопления. Следующее за этим временное расширение ядра и всего скопления в целом (после распада коллективных колебаний и перехода кинетической энергии колебаний скопления в тепловую энергию движения звезд) приводит к охлаждению ядра и развитию гравитационной неустойчивости за время  $t \leq \tau_{st}$ , где  $\tau_{st}$  – время релаксации скопления за счет звездных сближений (о стадиях временной вириализации продолжительностью до  $10^8$  лет в моделях РЗС с последующим развитием колебаний ядра скопления см. [34]). Существование и неустойчивость таких колебаний в моделях РЗС теоретически рассмотрены в работах [34, 35], и подтверждены ещё одним методом в данной работе.

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В работе выполнены оценки времени корреляции  $\tau_c^{(f)}$  в пространстве величин  $f$  в моделях 1–6 РЗС. Корреляции в пространстве величин  $f$  наиболее быстро разрушаются в процессе эволюции у модели 6. Сравнение с результатами [7] величин

$\tau_c^{(r)}$  (время корреляции в пространстве  $r$ ) показало, что  $\tau_c^{(f)} < \tau_c^{(r)}$  во всех шести моделях РЗС. Отношение  $\tau_c^{(r)}/\tau_c^{(f)}$  возрастает от приблизительно 2.1 в модели 1 до примерно 17.0 в модели 6.

2. Выполнены оценки средних фазовых скоростей  $v_f, v_r, v_\nu$  колебаний величин  $f, r, \nu$  в моделях 1–6 РЗС. Величины  $v_f$  и  $v_\nu$  в моделях 1–4 в 5–20 раз меньше величин  $v_f$  и  $v_\nu$  в моделях 5 и 6, что, возможно, обусловлено большими длинами волн колебаний величин  $f$  и  $\nu$  в моделях 5, 6. Малые значения  $v_f$  и  $v_\nu$  в моделях 1–4 могут быть результатом формирования и наложения нескольких встречных бегущих радиальных волн в этих моделях. Величины  $v_f$  меньше среднеквадратических скоростей  $v_c$  движения звезд ядра в моделях 1–4 в 10–20 раз, и в моделях 5, 6 — приблизительно в 2 раза.

3. Впервые вычислены взаимные корреляционные функции колебаний фазовой плотности  $f$  моделей РЗС. Обнаружен ряд локальных экстремумов функции  $C_{12}(\tau, r)$ , выходящих за пределы погрешностей величин  $C_{12}(\tau, r)$  в точках  $\tau_j = P_j$ , что указывает на существование повышенных взаимных корреляций (разного знака) между колебаниями  $f$  с периодами  $P_j$  в центре скопления и на расстоянии  $r$  от его центра. Вычисленный соответствующий функции  $C_{12}(\tau, r)$  спектр частот колебаний  $f$ . Наибольший вклад в среднюю мощность колебаний  $f$  вносят низкие частоты  $\nu \in [0.5, 2.4]$ , соответствующие колебаниям ядра и всего скопления в целом. Обнаружен ряд локальных максимумов

мов частотного спектра, выходящих за пределы погрешностей вычисления спектра, что указывает на повышенные мощность и интенсивность возбуждения колебаний  $f$  с частотами  $\nu$  из окрестностей точек локальных максимумов  $S_\nu$ . Отмечена возможная роль резонансов в формировании разных участков спектра частот. Сравнительный анализ спектров моделей 1–6 позволяет предположить, что бóльшая степень нестационарности модели 1 по сравнению с другими моделями обеспечивается бóльшими значениями  $\overline{S}'_\nu$ , бóльшим числом локальных максимумов функции  $S_\nu$  и бóльшей плотностью их расположения в низкочастотной области спектра.

4. Впервые вычислены дисперсионные кривые для колебаний фазовой плотности  $f$  в численных динамических моделях РЗС. Подтверждено наличие известных неустойчивых колебаний фазовой плотности в ядрах моделей скопления, связанных с гомологическими колебаниями ядер. Обнаружено несколько десятков новых неустойчивых колебаний фазовой плотности в каждой из моделей. Количество таких колебаний немонотонно убывает с увеличением расстояния  $r$  от центра скопления. Обсуждаются возможные механизмы развития таких колебаний в моделях РЗС. Высокочастотные неустойчивые колебания величин  $f$  вполне могут быть обусловлены развитием поляризационных облаков от прохождения звезд в моделях РЗС, возникновением резонансов между колебаниями величин  $f$  на разных частотах либо турбулентностью в движениях звезд в модели 1 скопления.

5. Фазы  $r k_\nu$  неустойчивых колебаний  $f$  достаточно равномерно распределены вдоль оси  $k_\nu$ . Гистограммы  $N(k_\nu)$  также показывают достаточно равномерное распределение величин  $k_\nu$ . Многократные изменения знака  $k_\nu$  в рассмотренном интервале частот на дисперсионных кривых указывают на формирование в моделях 1–6 ряда встречных бегущих радиальных волн колебаний величин  $f$ .

6. Наличие большого числа неустойчивых колебаний величин  $f$ , а также повышенные мощность и, следовательно, интенсивность возбуждения таких колебаний в модели 1 рассматриваются как аргументы в пользу турбулентности, развивающейся в модели 1 скопления.

7. Детальное исследование скоростей движения звезд в РЗС из списка [52] способно дать дополнительные (к полученным в [49] и доступным на <http://cdsarc.u-strasbg.fr/cgi-bin/Vizier?-source=J/AZh/89/674>) данные о нестационарности этих скоплений, о неустойчивости в скоплениях колебаний величины  $f$ , параметры которых помечены в Таблице 2 знаком “\*”. Для этого могут быть использованы радиальные изменения дисперсии скоростей звезд скопления, дисперсии

тангенциальных и лучевых скоростей звезд в широких окрестностях этих скоплений (увеличение дисперсии скоростей звезд с расстоянием от центра скопления является важным кинематическим признаком нестационарности РЗС [34]).

## БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы признательны старшему научному сотруднику Астрономической обсерватории УрФУ С. Ю. Горде за полезное обсуждение работы. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке ФЦП “Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2012 годы” (государственный контракт № 16.518.11.7074).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. P. H. Chavanis, *Physica A* **361**, 81 (2006).
2. P. H. Chavanis, *Physica A* **387**, 787 (2008).
3. P. H. Chavanis, *Physica A* **387**, 1504 (2008).
4. T. Baertschiger and F. S. Labini, *Physical Rev. D.* **69**, 123001 (2004).
5. M. Botaccio, M. Montuori, L. Pietronero et. al., *Mem. S. A. It. Suppl.* **1**, 120 (2003).
6. M. Botaccio, L. Pietronero, A. Amici et al., *Physica A* **305**, 247 (2002).
7. V. M. Danilov, S. I. Putkov, *Astron. Rep.* **56**, 623 (2012).
8. V. M. Danilov, *Astron. Rep.* **46**, 887 (2002).
9. S. J. Aarseth, *Astronom. and Astrophys.* **35**, 237 (1974).
10. I. R. King, *Astronom. J.* **67**, 471 (1962).
11. V. M. Danilov, L. V. Dorogavtseva, *Astron. Rep.* **52**, 467 (2008).
12. Я. Ф. Волков, В. Г. Дятлов, Р. И. Митина, *Диагностика турбулентной плазмы* (Наук. думка, Киев, 1983).
13. М. Бернар, Ж. Бриффо, Ж. Бюссак и др., *Диагностика плазмы* (Атомиздат, Москва, 1973), Вып. 3, с. 449.
14. G. Severne and M. J. Haggerty, *Astrophys. and Space Sci.* **45**, 287 (1976).
15. I. H. Gilbert, *Astrophys. J.* **152**, 1043 (1968).
16. I. H. Gilbert, *Astrophys. J.* **159**, 239 (1970).
17. C. Nardini, S. Gupta, S. Ruffo, et. al., *J. Stat. Mech.* L01002 (2012).
18. J. Goodman, D. C. Hoggie, and P. Hut, *Astrophys. J.* **415**, 715 (1993).
19. H. E. Kandrup, M. E. Magon, and H. C. Smith, *Astrophys. J.* **428**, 458 (1994).
20. N. Komatsu, T. Kiwata, and S. Kimura, *Physica A* **387**, 2267 (2008).
21. V. M. Danilov, *Astron. Lett.* **23**, 322 (1997).
22. R. H. Miller, *Astrophys. J.* **140**, 250 (1964).
23. H. E. Kandrup, *Physics Lett. A* **140**, 97 (1989).
24. H. E. Kandrup, *Physica A* **73**, 169 (1990).
25. H. E. Kandrup, *Astrophys. J.* **364**, 420 (1990).

26. Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, *Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса* (Наука, Москва, 1988).
27. Ю. Л. Климонтович, *Статистическая теория открытых систем* (ТОО “Янус,” Москва, 1995).
28. V. G. Gurzadyan and G. K. Savvidy, *Astronom. and Astrophys.* **160**, 203 (1986).
29. D. Bocaletti, G. Pucasso, and R. Ruffini, *Astronom. and Astrophys.* **244**, 48 (1991).
30. V. M. Danilov, E. V. Leskov, *Astron. Rep.* **49**, 190 (2005).
31. H. E. Kandrup and H. Jr. Smith, *Astrophys. J.* **374**, 255 (1991).
32. H. E. Kandrup and H. Jr. Smith, *Astrophys. J.* **399**, 627 (1992).
33. H. E. Kandrup, *Astrophys. J.* **500**, 120 (1998).
34. V. M. Danilov, *Astron. Rep.* **55**, 473 (2011).
35. V. M. Danilov, *Astron. Rep.* **52**, 888 (2008).
36. В. Л. Поляченко, А. М. Фридман, *Равновесие и устойчивость гравитирующих систем* (Наука, Москва, 1976).
37. S. A. Kutuzov, L. P. Osipkov, *Sov. Astron.* **24**, 17 (1980).
38. V. M. Danilov, L. V. Dorogavtseva, *Astron. Rep.* **47**, 483 (2003).
39. Ю. Л. Климонтович, *Статистическая физика* (Наука, Москва, 1982).
40. Дж. Бендат, А. Пирсол, *Применения корреляционного и спектрального анализа* (Мир, Москва, 1983).
41. В. М. Данилов, А. П. Рязанов, *Астрономо-геодезические исследования*, Ред. К. А. Бархатова (Уральский гос. университет, Свердловск, 1985), с. 19.
42. В. М. Данилов, А. П. Рязанов, *Астрон. циркуляр* **1487**, 3 (1987).
43. Д. Грей, *Наблюдения и анализ звездных фотосфер* (Мир, Москва, 1980).
44. W. S. Cleveland and S. J. Devlin, *Journal of the American Statistical Association.* **83**, 596 (1988).
45. V. M. Danilov, *Astron. Rep.* **54**, 514 (2010).
46. К. А. Бархатова, *Астрон. ж.* **33**, 556 (1956).
47. А. Ф. Сеleznev, *Astron. Astrophys. Trans.* **4**, 167 (1994).
48. J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, 6nd ed. (Univ. Press, Princeton, 2008).
49. V. M. Danilov, S. I. Putkov, *Astron. Rep.* **56**, 609 (2012).
50. P. H. Chavanis, *Physica A* **365**, 102 (2006).
51. F. Bouchet, S. Gupta, and D. Mukamel, *Physica A* **389**, 4389 (2010).
52. V. M. Danilov and A. F. Seleznev, *Astron. Astrophys. Trans.* **6**, 85 (1994).

## Correlations, Spectra, and Instability of Phase-Space Density Oscillations in Open-Cluster Models

V. M. Danilov, S. I. Putkov

The dynamical evolution of six open star cluster models is analyzed using the correlation and spectral analysis of phase-space density oscillations. The two-time and mutual correlation functions are computed for oscillations of the phase-space density of cluster models. The data for two-time and two-particle correlations are used to determine the correlation time for phase-space density oscillations  $((0.1-1) \cdot \tau_{v.r.}$ , where  $\tau_{v.r.}$  is the violent relaxation time of the model) and average phase velocities of the propagation of such oscillations in cluster models. These velocities are 2–20 times smaller than the root mean square velocities of stars in the cluster core. The power spectra and dispersion curves of phase-space density oscillations are computed using the Fourier transform of mutual correlation functions. The results confirm the presence of known unstable phase-space density oscillations due to homologous oscillations of cluster cores. The models are found to exhibit a number of new unstable phase-space density oscillations (up to 32–41 pairs of oscillations with different complex conjugate frequencies in each model; the e-folding time of the amplitude growth of such oscillations is  $(0.4-10) \tau_{v.r.}$  and their phases are distributed rather uniformly). Astrophysical applications of the results obtained (irregular structure of open star clusters, formation and decay of quasi-stationary states in such clusters) are discussed.

*Keywords:* stars: kinematics and dynamics—Galaxy: open clusters and associations: general