

УДК 524.6-34:524.63

ФРАКТАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗВЕЗД В ОКРЕСТНОСТИ СОЛНЦА И СЛУЧАЙНЫЕ СИЛЫ

© 2025 М. Л. Осташова^{1*}, А. С. Расторгуев^{1,2**}¹Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Москва, 119234 Россия²Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, 119991 Россия

Поступила в редакцию 12 февраля 2025 года; после доработки 23 марта 2025 года; принята к публикации 26 марта 2025 года

В данной работе изучается закон распределения модуля случайной силы в приближении ближайшего соседа (обобщенное распределение Хольцмарка) и асимптотика распределения Хольцмарка для больших случайных сил для фрактальной звездной среды в окрестности Солнца. Рассматривается роль столкновительных процессов и случайных сил в динамике звездных систем. Данное исследование основано на изучении пространственного распределения 200 000 звезд всех спектральных классов на расстоянии от 1 до 100 пк от Солнца по данным Gaia DR2, результаты которого указывают на присутствие фрактальных структур в околосолнечной окрестности со средней фрактальной размерностью $D \simeq 2.41$. Выведенное для фрактальной звездной среды асимптотическое распределение случайной силы демонстрирует важную роль сильных полей, причем величина случайной силы убывает несколько медленнее по сравнению с ее распределением для однородной среды.

Ключевые слова: *звезды: кинематика и динамика — Галактика: окрестности Солнца — Галактика: структура*

1. ВВЕДЕНИЕ

Существование фрактальных структур в мире галактик было предсказано Карпентером (Carpenter, 1938) и де Вокулером (de Vaucouleurs, 1970). Они обнаружили, что численная плотность $n(r)$ галактик в скоплении уменьшается с ростом их характерных размеров по степенному закону $n(r) \sim r^{-1.7}$, где r — размер скопления. Де Вокулер распространил этот результат не только на скопления галактик, но и на всю галактическую среду. Он показал, что галактическая среда устроена иерархически и, следовательно, любой наблюдатель, включенный в иерархию, обнаружит, что средняя плотность вокруг него убывает с расстоянием. При этом в галактической среде нет выделенного положения, то есть любые, достаточно большие одинаковые объемы имеют одинаковую среднюю плотность, независимо от положения их центров относительно друг друга. Эту плотность можно назвать инвариантной условной плотностью. Однако, если размеры этих одинаковых объемов синхронно изменять, условная плотность будет значимо изменяться с характерным размером объема r по упомянутому выше степенному закону.

Мандельброт (Mandelbrot, 1977; 1986) интерпретировал этот закон как частный случай стохастического самоподобия трехмерных случайных фрактальных множеств и показал, что

$$n(r) \sim r^{-\alpha}, \quad (1)$$

где r — характерный размер увеличивающегося объема вокруг наблюдателя, включенного в иерархию, $n(r)$ — инвариантная средняя условная звездная плотность, а α — показатель степени. Мандельброт применил фрактальную (Хаусдорфову) размерность D для звездной среды и показал, что $D = 3 - \alpha$. При этом, в зависимости от характеристик среды, $0 \leq D \leq 3$.

В дальнейших работах фрактальность строения областей звездообразования была установлена по наблюдениям молодого населения нашей и других галактик (Efremov and Elmegreen, 1998; Joyce et al., 1999; Sanchez et al., 2010; Gouliermis et al., 2014), а также для F- и G-карликов в окрестности Солнца (Chumak and Rastorguev, 2016) по данным Женевско-Копенгагенского обзора (Nordstrom et al., 2004; Holmberg et al., 2007) и для межзвездных газопылевых облаков в широком диапазоне размеров (Larson, 1981).

Ранее мы изучили пространственное распределение 200 000 звезд всех спектральных классов в

*E-mail: ostashova.mariya@physics.msu.ru

**E-mail: alex.rastorguev@gmail.com

околосолнечной окрестности на расстоянии от 1 до 100 пк от Солнца из наблюдательных данных космического телескопа Gaia DR 2 (Brown et. al., 2018). Анализ пространственного распределения звезд выполнялся методом “масса–радиус”. Численные расчеты показали, что средняя условная локальная звездная плотность $n(r)$ в сферах с увеличивающимся радиусом r с центром в i -ой звезде аппроксимируется степенными законами:

$$n(r) = h r^{-\alpha}, \quad (2)$$

где $h = 1.654$ и $\alpha = 0.586$ с уровнем значимости по Пирсону $R^2 \simeq 0.992$. Этот результат подтверждает выводы Вокулера–Мандельброта для фрактальных структур в гравитирующих средах и указывает на присутствие фрактальных структур в звездной среде с фрактальной (Хаусдорфовой) размерностью $D \approx 2.41$ (Ostashova and Rastorguev, 2024).

В настоящей работе мы продолжаем изучение фрактальных эффектов и, в частности, их влияние на кинетику звездной среды в окрестности Солнца.

2. СТОЛКНОВИТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМАХ И СЛУЧАЙНЫЕ СИЛЫ

Классическая звездная динамика строилась на решении основного уравнения звездной динамики — уравнения Больцмана:

$$\frac{Df}{Dt} = - \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{st}, \quad (3)$$

где Df/Dt — полная производная по времени t от функции фазовой плотности f (или Стоксова производная), а $(\partial f/\partial t)_{st}$ — столкновительный член. По отношению к фазовой плотности оно представляет собой уравнение с ненулевой правой частью, роль которой выполняет член, зависящий от иррегулярных сил, то есть сил, возникающих в результате взаимодействия частиц при сближениях. Для нахождения его явного выражения требуется знание конкретного закона, по которому они взаимодействуют при сближениях. Согласно общепринятой точке зрения, в звездной динамике рассматривался лишь тот частный случай уравнения, когда его правая часть обращается в ноль. При этом уравнение принимает простой вид и мы получаем бесстолкновительное уравнение Больцмана, которое описывает эволюцию макроскопического состояния системы:

$$Df/Dt = 0. \quad (4)$$

По отношению к фазовой плотности оно является линейным однородным уравнением в частных производных первого порядка. Правая часть обращается в ноль, в случае если действие

иррегулярных сил ничтожно мало, что является некорректным. Статистическая звездная динамика без учета звездных сближений приводит к основному парадоксу классической звездной динамики (Ogorodnikov, 1958): определяемое для большинства звездных систем время релаксации оказывается бесконечно большим и на много порядков превышает возраст системы.

Для учета эффектов действия иррегулярных сил достаточно использовать концепцию парных сближений звезд. Наша пробная звезда испытывает влияние большого числа звезд, в том числе находящихся на большом расстоянии. Звезды на больших расстояниях (порядка размеров системы) создают регулярное поле, поскольку их эффект может рассматриваться в качестве сглаженного действия большого числа далеких звезд. Ближайшие же звезды оказывают влияние на нашу звезду одновременно, и их общая сила описывается стохастическими законами, потому что из-за взаимных движений звезд конфигурация ближайших соседей постоянно меняется. Вследствие этого взаимодействие звезд может описываться в рамках случайного стохастического процесса. В данном контексте полезно распределение Хольцмарка для случайной силы.

Исследования столкновительных процессов в звездных системах начались с пионерских работ в первой половине XX в. (Charlier, 1917; Jeans, 1919; Rosseland, 1928; Smart, 1938; Spitzer, 1940). Классическая модель звездной среды Галактики как бесконечной однородной среды с ограниченными флуктуациями плотности была взята за основу Chandrasekhar (1943) для получения уравнений звездной динамики. Chandrasekhar (1943) первым использовал распределение Хольцмарка (Holtzmark, 1919) для модуля случайной силы в бесконечной однородной звездной среде и показал, что асимптотика этого распределения в приближении больших сил полностью совпадает с распределением силы, вызванной взаимодействием с ближайшим соседом, так называемая задача Герца (Hertz, 1909). Именно это важнейшее обстоятельство лежит в основе столкновительной кинетики звездных систем. Оно говорит о том, что подавляющий вклад в силы, возникающие в результате взаимодействия частиц при сближениях, вносят парные сближения звезд. Последующее развитие звездной динамики во второй половине XX века основывалось на этом принципе.

Один из важнейших факторов, определяющий ход кинетических процессов в звездной системе, — это структурная неоднородность звездной среды. Реальная звездная среда, в отличие от классической бесконечной однородной среды с ограниченными флуктуациями плотности, является

неоднородной и содержит разные гравитационно-динамически связанные структуры, например: ядра шаровых скоплений, тесные двойные системы, рассеянные звездные скопления, звездные ассоциации, молекулярные облака и газопылевые комплексы. Естественно, что процессы, происходящие в таких системах, не могут быть описаны в рамках классической модели Галактики.

Вследствие этого изучение структурных неоднородностей в звездной среде Галактики и, в частности, фрактальных структур и оценка их влияния на распределение случайной силы являются актуальными задачами звездной динамики.

3. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОДУЛЯ СЛУЧАЙНОЙ СИЛЫ ВО ФРАКТАЛЬНОЙ СРЕДЕ В ОКРЕСТНОСТИ СОЛНЦА ПО ДАННЫМ GAIA DR2

В данной работе изучается закон распределения случайной силы в приближении ближайшего соседа для фрактального распределения звезд в околосолнечной окрестности с Хаусдорфовой размерностью $D \approx 2.41$.

В работе Chumak and Rastorguev (2016) было получено обобщение распределения Хольцмарка для фрактального распределения звезд в приближении ближайшего соседа. Как отмечалось выше, Chandrasekhar (1943) получил точное решение для распределения модуля флуктуирующей случайной силы в случае однородного пространственного распределения звезд. Это решение для модуля силы $F = |\vec{F}|$ имеет вид распределения Хольцмарка:

$$W(F) = H(\beta) a^{2/3}, \quad (5)$$

где β — безразмерная сила, а $H(\beta)$ — распределение сил, которое выглядит как

$$H(\beta) = \frac{2}{\pi\beta} \int_0^\infty \exp\left[-(x/\beta)^{3/2}\right] x \sin x dx. \quad (6)$$

В случае звезд равных масс имеем

$$a = \frac{4}{15} (2\pi Gm)^{3/2} n, \quad (7)$$

при этом безразмерная сила равна

$$\beta = Fa^{-2/3}. \quad (8)$$

Chandrasekhar (1947) показал, что асимптотика распределения Хольцмарка в приближении больших случайных сил,

$$W(F)|_{F \rightarrow \infty} \simeq 2\pi(Gm)^{3/2} n F^{-5/2}, \quad (9)$$

в точности совпадает с распределением случайной силы, действующей на пробную звезду единичной

массы со стороны ближайшего соседа с массой m , находящегося на расстоянии r :

$$F = \frac{Gm}{r^2}. \quad (10)$$

Асимптотика для $W(F)$ может быть получена из закона распределения расстояний до ближайшего соседа $w(r)$:

$$w(r)dr = 4\pi \exp(-4\pi r^3 n/3) n r^2 dr, \quad (11)$$

что приводит к уравнению

$$W(F) dF = 4\pi n (Gm)^{3/2} \times \exp\left[-(4\pi n/3)(Gm)^{3/2} F^{-3/2}\right] F^{-5/2} dF. \quad (12)$$

Обобщение распределения Хольцмарка было получено для фрактальной пространственной плотности звезд в предположении, что сила, действующая на пробную звезду, также определяется в основном ближайшим соседом с учетом фрактальной структуры звездной среды. Для этого при выводе распределения расстояния до ближайшего соседа необходимо учесть зависимость средней плотности от расстояния в виде выражения (2):

$$w(r) = \left[1 - \int_0^r w(r) dr\right] 4\pi r^2 n(r) = 4\pi h \left[1 - \int_0^r w(r) dr\right] r^{D-1}. \quad (13)$$

Отсюда получаем:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{w(r)}{4\pi h r^{D-1}} \right] = -4\pi h r^{D-1} \frac{w(r)}{4\pi h r^{D-1}}. \quad (14)$$

Согласно (13), $w(r) \rightarrow 4\pi h r^{D-1}$ при $r \rightarrow 0$ и

$$w(r)dr = 4\pi h \exp\left[-(4\pi h/3) r^D\right] r^{D-1} dr. \quad (15)$$

Это и есть аналог формулы (11), то есть обобщение закона распределения расстояния до ближайшего соседа для случая фрактального распределения звезд. Далее, учитывая (10), из уравнения (15) после несложных преобразований можно получить обобщение формулы (12) для случая распределения звездной плотности по степенному закону (2). Оно имеет вид:

$$W(F|D) dF = 4\pi h (Gm)^{D/2} \times \exp\left[-(4\pi h/3)(Gm/F)^{D/2}\right] F^{-(D+2)/2} dF. \quad (16)$$

Из формулы (16) в пределе однородной среды ($\alpha \rightarrow 0, D \rightarrow 3, h = n$) может быть получено

стандартное распределение Хольцмарка (12). Для сильных полей мы находим из (16), что

$$W(F|D)|_{F \rightarrow \infty} \approx 4\pi h(Gm)^{D/2} F^{-(D+2)/2}. \quad (17)$$

Введем безразмерный параметр

$$x = (4\pi h/3)(Gm/F)^{D/2},$$

тогда формула (16) примет вид:

$$W(F|D)F = 3xe^{-x}. \quad (18)$$

Соответственно, имеем:

$$AW(F|D) = (3x)^{(D+2)/2} e^{-x}, \quad (19)$$

где

$$A = \frac{(4\pi h)^{2/D}}{Gm}. \quad (20)$$

На Рис. 1 показаны: стандартное распределение Хольцмарка (нижняя кривая) и полученное распределение, учитывающее установленный нами фрактальный характер 200 000 звезд с хаусдорфовой размерностью $D \approx 2.41$ (верхняя кривая).

Из формул (18), (19) и (20) видно, что распределение $W(F)$ быстрее всего убывает с ростом модуля силы в случае однородного распределения звезд, то есть для $D = 3$. Полученный результат находится в согласии с результатом изучения фрактальных структур звездной среды в окрестности Солнца для 13 000 F- и G-карликов на расстояниях от 1 до 20 пк от Солнца из наблюдательных данных Женевско-Копенгагенского обзора (Chumak and Rastorguev, 2016). При этом наименее вероятное значение нормированной случайной силы, с учетом полученной для этих звезд фрактальной размерности $D \approx 1.23$, также оказывается выше рассчитанного по классическому распределению Хольцмарка. Любые реальные распределения гравитирующих масс со средней условной плотностью вида (2) с $\alpha > 0$ ($D < 3$) будут приводить к распределению случайной силы $W(F)$, спадающему с ростом силы F медленнее по сравнению с законом распределения силы для однородного распределения звезд, что означает большую роль сильных полей в кинетике гравитирующей среды.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ пространственного распределения 200 000 звезд всех спектральных классов на расстоянии от 1 до 100 пк от Солнца по данным Gaia DR2 указывает на присутствие фрактальных структур в звездной среде с фрактальной размерностью $D \approx 2.41$.

Для установленного фрактального распределения звезд околосолнечной окрестности изучена вероятность распределения модуля случайной силы

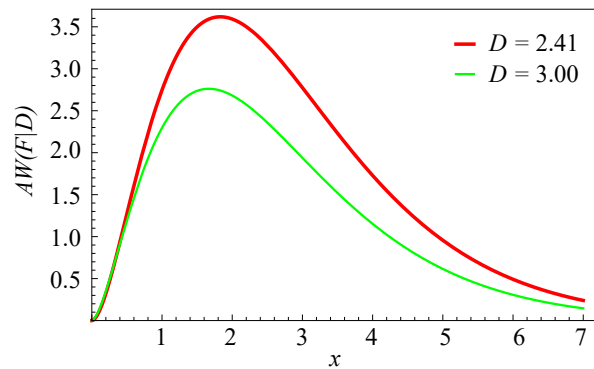


Рис. 1. Закон распределения случайной силы $W(F|D)$ для изученных нами 200 000 звезд с фрактальной размерностью $D = 2.41$ (верхняя кривая) и для стандартного распределения Хольцмарка с $D = 3$ (нижняя кривая).

в приближении ближайшего соседа. Показано, что фрактальный характер звездной среды приводит к распределению случайной силы $W(F)$, спадающему с ростом силы F несколько медленнее по сравнению с законом распределения силы для однородного распределения звезд, как это следует из вида формулы (16). Это указывает на большую роль сильных полей и, следовательно, парных сближений звезд в столкновительной кинетике гравитирующей среды по сравнению с классической однородной звездной средой.

БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М. В. Ломоносова. В работе использовались данные миссии Gaia Европейского космического агентства (ЕКА) (<https://www.cosmos.esa.int/gaia>), обработанные Консорциумом по обработке и анализу данных Gaia (DPAC, <https://www.cosmos.esa.int/web/gaia/dpac/consortium>).

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Данная работа финансировалась за счет бюджетов учреждений.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. G. A. Brown et al. (Gaia Collab.), *Astron. and Astrophys.* **616**, id. A1 (2018). DOI:10.1051/0004-6361/201833051

2. E. F. Carpenter, *Astrophys. J.* **88**, 344 (1938). DOI:10.1086/143987
3. S. Chandrasekhar, *Reviews of Modern Physics* **15** (1), 1 (1943). DOI:10.1103/RevModPhys.15.1
4. S. Chandrasekhar, *Stochastic Problems in Physics and Astronomy* (Gos. izdatel'stvo inostrannoi literatury, Moscow, 1943) [in Russian].
5. C. V. L. Charlier, *Meddelanden fran Lunds Astronomiska Observatorium Series II* **16**, 5 (1917).
6. O. V. Chumak and A. S. Rastorguev, *Astronomy Letters* **42** (5), 307 (2016). DOI:10.1134/S1063773716050029
7. G. de Vaucouleurs, *Science* **167** (3922), 1203 (1970). DOI:10.1126/science.167.3922.1203
8. Y. N. Efremov and B. G. Elmegreen, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **299** (2), 588 (1998). DOI:10.1046/j.1365-8711.1998.01819.x
9. D. A. Gouliermis, S. Hony, and R. S. Klessen, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **439** (4), 3775 (2014). DOI:10.1093/mnras/stu228
10. P. Hertz, *Mathematische Annalen* **76**, 387 (1909). DOI:10.1007/BF01450410
11. J. Holmberg, B. Nordström, and J. Andersen, *Astron. and Astrophys.* **475** (2), 519 (2007). DOI:10.1051/0004-6361:20077221
12. J. Holtsmark, *Annalen der Physik* **363** (7), 577 (1919). DOI:10.1002/andp.19193630702
13. J. H. Jeans, *Problems of Cosmogony and Stellar Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1919).
14. M. Joyce, M. Montuori, and F. Sylos Labini, *Astrophys. J.* **514** (1), L5 (1999). DOI:10.1086/311930
15. R. B. Larson, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **194**, 809 (1981). DOI:10.1093/mnras/194.4.809
16. B. B. Mandelbrot, *Fractals: Form, Chance and Dimension* (W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1977).
17. B. B. Mandelbrot, in *Proc. Sixth Trieste Int. Symp. on Fractals in Physics, Trieste, Italy, 1985*, Ed. by L. Pietronero and E. Tosatti (North-Holland, Amsterdam, 1986), p. 3.
18. B. Nordström, M. Mayor, J. Andersen, et al., *Astron. and Astrophys.* **418**, 989 (2004). DOI:10.1051/0004-6361:20035959
19. K. F. Ogorodnikov, *Dynamics of Stellar Systems* (Gos. izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury, Moscow, 1958).
20. M. L. Ostashova and A. S. Rastorguev, *Astrophysical Bulletin* **79** (3), 504 (2024). DOI:10.1134/S1990341324600601
21. S. Rosseland, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **88**, 208 (1928). DOI:10.1093/mnras/88.3.208
22. N. Sánchez, N. Añez, E. J. Alfaro, and M. Crone Odekon, *Astrophys. J.* **720** (1), 541 (2010). DOI:10.1088/0004-637X/720/1/541
23. W. M. Smart, *Stellar Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1938).
24. L. Spitzer, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **100**, 396 (1940). DOI:10.1093/mnras/100.5.396

Fractal Distribution of Stars in the Solar Neighborhood and Random Forces

M. L. Ostashova¹ and A. C. Rastorguev^{1,2}

¹Sternberg Astronomical Institute, Moscow State University, Moscow, 119234 Russia

²Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia

In this paper, we study the distribution law of the random force modulus in the nearest neighbor approximation (generalized Holtsmark distribution) and the asymptotic behavior of the Holtsmark distribution for large random forces for a fractal stellar medium in the solar neighborhood. The role of collisional processes and random forces in the dynamics of stellar systems is considered. This study is based on the investigation of the spatial distribution of 200 000 stars of all spectral classes at distances from 1 to 100 pc from the Sun according to Gaia DR2 data, the results of which indicate the presence of fractal structures in the solar neighborhood with a fractal dimension of $D \simeq 2.41$. The asymptotic distribution of random force derived for a fractal stellar medium demonstrates the important role of strong fields, with the magnitude of the random force decreasing somewhat more slowly compared to its distribution for a homogeneous medium.

Keywords: *stars: kinematics and dynamics—Galaxy: solar neighbourhood—Galaxy: structure*