

УДК 524.7-17

## МЕТОДЫ АНАЛИЗА МНОГОВОЛНОВЫХ КРИВЫХ БЛЕСКА АКТИВНЫХ ЯДЕР ГАЛАКТИК

© 2025 М. Л. Хабибуллина<sup>1\*</sup>, В. А. Столяров<sup>1,2</sup>, П. Г. Жеканис<sup>1</sup>, Т. В. Муфахаров<sup>1</sup>, Ю. В. Сотникова<sup>1</sup>, А. Е. Вольвач<sup>3</sup>, Г. А. Борман<sup>3</sup>, Т. С. Гришина<sup>4</sup>, Е. Г. Ларионова<sup>4</sup>, Д. А. Морозова<sup>4</sup>, С. С. Савченко<sup>4,5</sup>, И. С. Троицкий<sup>4</sup>, Ю. В. Троицкая<sup>4</sup>, А. А. Васильев<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Специальная астрофизическая обсерватория Российской академии наук, Нижний Архыз, 369167 Россия

<sup>2</sup>Кавендишская лаборатория, Кембриджский университет, Кембридж, CB3 0HE Великобритания

<sup>3</sup>Крымская астрофизическая обсерватория РАН, Научный, 298409 Россия

<sup>4</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 199034 Россия

<sup>5</sup>Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, Санкт-Петербург, 196140 Россия

Поступила в редакцию 6 августа 2025 года; после доработки 29 сентября 2025 года; принята к публикации 5 октября 2025 года

В работе детально представлены методы анализа многоволновых кривых блеска активных ядер галактик с неравномерной временной дискретизацией, включая применение структурной функции, автокорреляционной и кросс-корреляционной функций, периодограммы Ломба–Скаргла и весового вейвлет-анализа. Структурные функции позволяют количественно оценить временные масштабы вариаций, корреляционные функции — выявить временные задержки между разными частотами, периодограмма Ломба–Скаргла — обнаружить периодичности в неравномерных данных, а вейвлет-анализ дает возможность локализовать переменные процессы во времени и исследовать эволюцию частотного состава сигнала. Комплексное использование этих методов позволяет более полно исследовать временную и частотную структуры физических процессов в активных ядрах галактик с учетом влияния неравномерности экспериментальных данных. Рассмотрены преимущества и ограничения каждого метода на примере анализа конкретных источников, а также продемонстрирована их практическая значимость для исследования переменности активных ядер галактик.

Ключевые слова: *методы: анализ данных — методы: статистические — галактики: активные — галактики: джеты — квазары: общие сведения*

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Активные ядра галактик (АЯГ) представляют собой одни из самых энергетически мощных и переменных источников во Вселенной. Их излучение формируется в окрестностях сверхмассивных черных дыр, окруженных аккреционными дисками и часто сопровождающихся релятивистскими джетами. Среди АЯГ выделяются различные подклассы, включая радиогромкие и радиотихие квазары, сейфертовские галактики, радиогалактики и блазары, отличающиеся углом ориентации джета, режимом акреции и спектральными характеристиками (Ghisellini et al., 1998; Blandford et al., 2019).

Одной из ключевых особенностей АЯГ является выраженная переменность нетеплового излучения на широком диапазоне временных масштабов — от минут до десятилетий — и в различных участках электромагнитного спектра: от радиоволн до

гамма-лучей (Goyal et al., 2022; Bhatta et al., 2023; Krishna Mohana et al., 2024; Vlasuk et al., 2024). Анализ многочастотных кривых блеска таких объектов позволяет исследовать физику процессов, происходящих вблизи “центральной машины”: структуру аккреционного потока, внутренние ударные волны в джете, механизмы генерации и усиления излучения, а также взаимное расположение областей излучения. Временные задержки между событиями на разных длинах волн дают ключевую информацию о распространении возмущений и об источниках затравочных фотонов в высокогенеретических диапазонах.

Кроме того, в кривых блеска АЯГ нередко наблюдаются признаки периодических или квазипериодических колебаний. Такие сигналы могут быть вызваны как геометрическими, так и физическими механизмами. К первым относятся, например, прецессия релятивистского джета (Romero et al., 2000), орбитальное и прецессионное движение в системе двойных сверхмассивных черных

\*E-mail: rita@sao.ru

дыр (Valtonen et al., 2012; D’Orazio et al., 2015; Britzen et al., 2018; 2023). К физическим механизмам относят нестабильности в аккреционном диске (Chakrabarti and Manickam, 2000), периодическое поступление вещества, а также внутренние нестабильности в джете, которые могут приводить к повторяющимся (иногда квазипериодическим) изменениям плотности и, как следствие, яркости излучения. Обнаружение периодических компонентов нетеплового излучения в АЯГ представляет особый интерес, так как может указывать на фундаментальные параметры “центральной машины” и структуры ядра. Однако подобные сигналы часто слабы, замаскированы шумами, нестационарными процессами или влиянием сразу нескольких механизмов, что требует применения специализированных методов анализа и расчета статистической значимости полученного результата.

Кривые блеска АЯГ имеют особенности, которые усложняют их анализ:

- нестационарность сигналов — процессы могут проявляться лишь на отдельных временных интервалах или изменять свои характеристики (амплитуду, период, фазу);
- неравномерность временного ряда — наблюдения часто представлены разреженными или нерегулярными измерениями из-за ограниченных возможностей инструментов или условий видимости
- многомасштабность процессов — переменность может проявляться на временах от часов до десятилетий.

Для решения этих задач в астрофизике разработано и активно применяется несколько методов анализа временных рядов, каждый из которых имеет свои преимущества и ограничения.

Метод структурных функций (СФ) (Simonetti et al., 1985) позволяет исследовать статистические свойства переменности без перехода в частотную область. Он эффективен для выявления характерных временных масштабов процессов. Этот подход применялся для анализа внутренних вариаций оптического излучения АЯГ (Bregman et al., 1988), для изучения межзвездной сцинтилляции радиоисточников (Simonetti et al., 1985), а также использовался в рамках программы UMRAO при исследовании континуального и поляризованного радиоизлучения блазаров (Hughes et al., 1992).

Периодограмма Ломба–Скаргла (ЛС) (Lomb, 1976; Scargle, 1982) представляет собой модифицированный метод Фурье-анализа, специально адаптированный для неравномерных временных рядов. Она широко используется в астрономии для выявления периодических и квазипериодических сигналов в данных, где традиционный Фурье-анализ неприменим из-за неравномерной выборки.

Корреляционные методы, включая автокорреляционную функцию (АКФ) и взаимную (кросс-корреляционную) функцию (ВКФ), применяются для поиска временных задержек между сигналами в разных диапазонах или для проверки наличия квазипериодичности в одном ряду. Важной задачей при этом является оценка статистической значимости корреляций. Для таких оценок часто используется метод Монте-Карло, при котором моделируется большое количество искусственных кривых блеска с параметрами, идентичными наблюдаемой кривой блеска, включая распределение вероятностей и спектральную плотность мощности (Emmanoulopoulos et al., 2013).

Вейвлет-анализ позволяет одновременно исследовать временную и частотную структуры сигнала, обеспечивая локализацию кратковременных и эволюционирующих процессов. В отличие от методов Фурье-анализа, вейвлеты хорошоправляются с нестационарными сигналами и позволяют исследовать временные изменения частотного состава данных, что особенно важно для анализа квазипериодических осцилляций в АЯГ. Однако вейвлет-анализ требует внимательного выбора базовой функции (mother wavelet) и может быть вычислительно затратным при работе с длинными временными рядами. Для данных, полученных с неравномерным шагом, классический вейвлет-анализ может давать искаженные результаты, и в таких случаях применяются модифицированные подходы, например взвешенное вейвлет-преобразование (Weighted Wavelet Z-transform, WWZ), учитывающее вариации плотности наблюдений (Foster, 1996).

Несмотря на разнообразие существующих методов, ни один из них не представляет собой универсального решения для анализа переменности АЯГ. Каждый подход имеет свои ограничения и требует осторожной интерпретации результатов, особенно при работе с реальными астрономическими данными.

В работе проводится сравнительный анализ ключевых методов исследования временных рядов, применяемых к кривым блеска АЯГ, с акцентом на их практическую применимость и ограничения.

## 2. СТРУКТУРНАЯ ФУНКЦИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

### 2.1. Определение

Структурная функция первого порядка — это метод анализа временных рядов, позволяющий понять, как изменяется сигнал на различных временных масштабах. Исторически этот метод был введен А. Н. Колмогоровым в 1941 году при решении задач, связанных с теорией турбулентности

(Kolmogorov, 1941). В астрономической практике широкое применение структурных функций для анализа временных рядов началось лишь в середине восьмидесятых годов, когда метод стал активно использоваться для изучения переменности излучения астрономических объектов, таких как АЯГ (Simonetti et al., 1985; см. также Paltani et al., 1998; Kataoka et al., 2001).

СФ первого порядка для временного масштаба  $\tau$  (лаг) определяется выражением

$$D^{(1)}(\tau) = \langle [F(t + \tau) - F(t)]^2 \rangle, \quad (1)$$

где  $F(t)$  — измеренная спектральная плотность потока в момент времени  $t$ , а угловые скобки  $\langle \rangle$  означают усреднение по всем парам точек, между которыми разность во времени равна  $\tau$ . Иными словами, СФ показывает, насколько в среднем отличаются значения плотности потока, если между ними проходит время  $\tau$ . Чем сильнее отличаются значения плотности на масштабе  $\tau$ , тем выше значение  $D^{(1)}(\tau)$ . Пример: при лаге  $\tau = 1$  день разности между соседними точками составляют около 0.53, что иллюстрирует среднюю амплитуду вариаций на данном масштабе.

Между СФ и АКФ  $R(\tau)$  существует связь:

$$D^{(1)}(\tau) = 2[\sigma^2 - R(\tau)], \quad (2)$$

где  $\sigma^2$  — дисперсия процесса. Если точки сильно коррелированы при лаге  $\tau$ , автокорреляция  $R(\tau)$  близка к  $\sigma^2$  и СФ мала. Если корреляция отсутствует,  $R(\tau)$  стремится к нулю и  $D^{(1)}(\tau)$  приближается к  $2\sigma^2$ . Таким образом, небольшие значения  $D^{(1)}(\tau)$  говорят о том, что сигнал мало меняется между точками, разделенными масштабом  $\tau$ .

Типичная форма СФ первого порядка показана на рис. 1, где изображена модельная кривая, характерная для многих астрофизических временных рядов. По оси абсцисс на этом графике отложен  $\lg \tau$ , а по оси ординат —  $\lg D(\tau)$ .

На таком графике обычно выделяют три характерные области.

- При малых временных масштабах СФ часто выходит на плато. Это плато связано с шумами измерений. Даже если сигнал не изменяется со временем, измерительные ошибки приводят к ненулевому значению СФ. Уровень этого плато обычно равен  $2\sigma_{\text{noise}}^2$ , где  $\sigma_{\text{noise}}^2$  — дисперсия ошибок измерений. При высокой точности измерений это плато может быть почти незаметным.
- При увеличении масштаба начинается рост СФ. Наклон этого участка в логарифмическом масштабе содержит информацию о характере процесса, происходящего в источнике. Если наклон

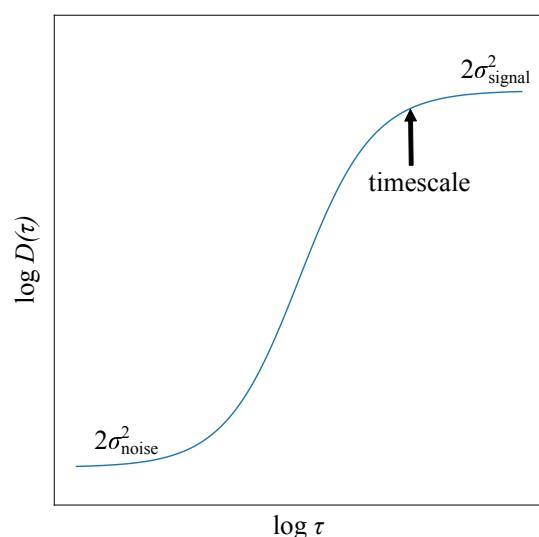


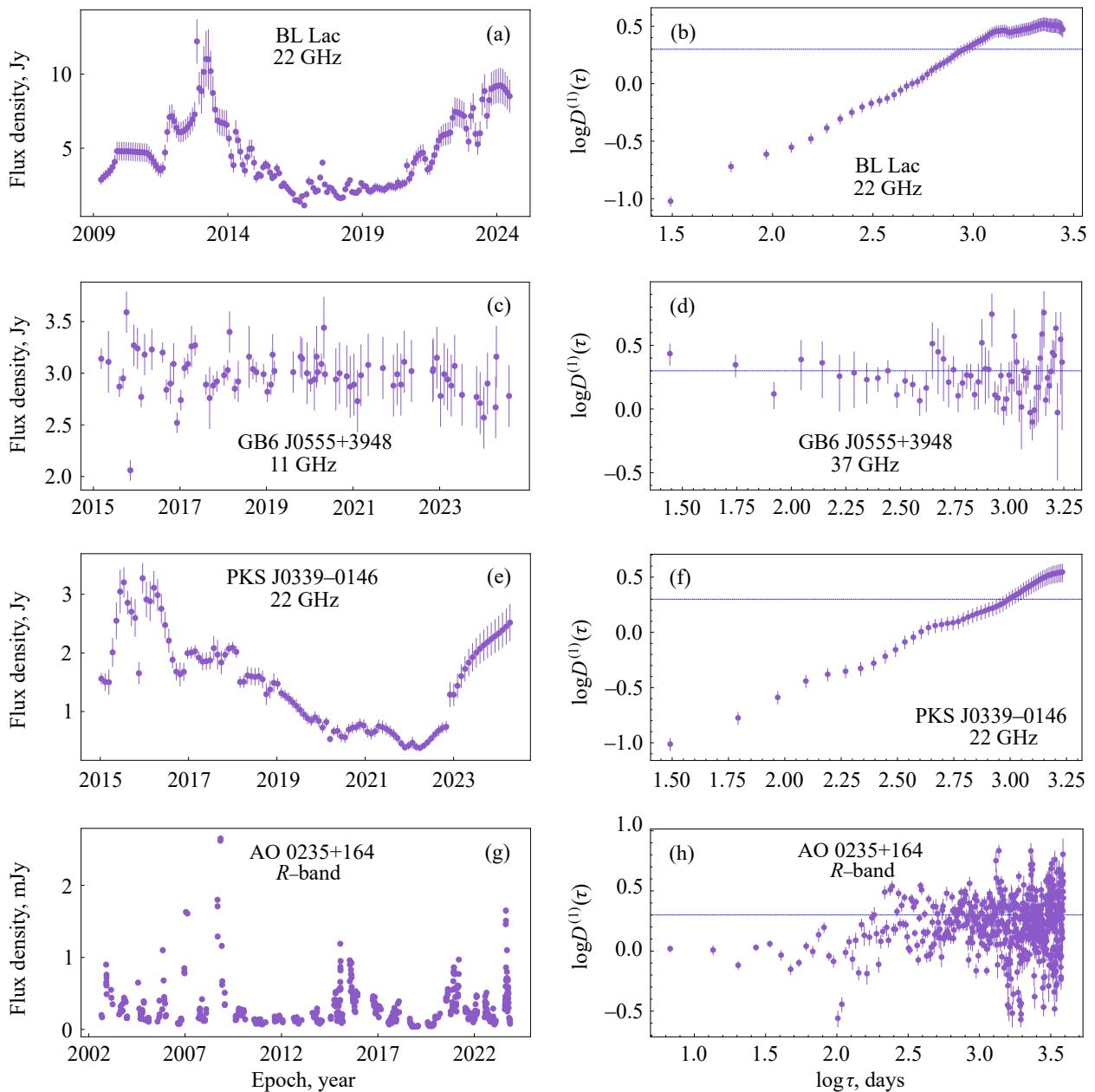
Рис. 1. Схематическое изображение «идеальной» СФ временного ряда с измерительным шумом.

$b$  близок к нулю, это свидетельствует о белом шуме: все точки временного ряда независимы и значения сигнала не коррелированы между собой. Если наклон  $b \approx 1$ , это признак случайного процесса, когда изменения сигнала накапливаются со временем и становятся больше с ростом лага. Наклон около двух обычно указывает на тренд или систематическое изменение в сигнале, например линейный рост или спад плотности потока. Таким образом, наклон графика  $\lg D^{(1)}(\tau)$  от  $\lg \tau$  позволяет диагностировать физическую природу переменности излучения объекта.

- При еще больших лагах СФ снова выходит на плато. Этот уровень определяется уже не шумами измерений, а полной дисперсией сигнала, то есть отражает амплитуду настоящей физической переменности источника. Когда лаг становится достаточно большим, значения сигнала перестают быть взаимосвязанными, и разности между ними уже не растут с увеличением лага. Таким образом, уровень второго плато показывает, насколько сильно в целом изменился поток источника за все время наблюдений.

На примере блазара BL Lac (см. рис. 2а, б) СФ на частоте 22 ГГц выходит на плато на временном масштабе  $\lg \tau \sim 3.1$ , что соответствует масштабу переменности порядка 1260 дней.

Иногда на графике СФ отсутствует заметный рост или наклон: СФ остается практически постоянной или колеблется вблизи шумового уровня на всех масштабах. Это означает отсутствие значимой физической переменности излучения на рассматриваемом временном масштабе измерений. Такую ситуацию иллюстрирует пример на панелях (с) и (д)



**Рис. 2.** Кривые блеска и СФ блазаров: (а), (б) — BL Lac на частоте 22 ГГц; (с), (д) — GB6 J0555+3948 на частоте 11 ГГц; (е), (ф) — PKS J0339-0146 на частоте 22 ГГц; (г), (х) — AO 0235+164 в оптическом диапазоне. Кривые блеска на частотах 11 и 22 ГГц получены на радиотелескопе РАТАН-600, а в оптическом диапазоне (в полосе  $R$ ) — на 1-м оптическом телескопе Цейсс-1000 CAO PAH (Vlasyuk et al., 2024).

рис. 2, где показаны кривая блеска и СФ блазара GB6 J0555+3948 на частоте 11 ГГц. Видно, что СФ остается почти плоской и не показывает роста с увеличением лага. Кривая блеска этого источника также не содержит заметных изменений потока в течение всего времени наблюдений.

Интерпретация СФ всегда требует осторожности. Например, если данные редкие или неравномерные, наклон может быть искажен, а для некоторых временных масштабов может просто не хватать данных, чтобы надежно вычислить СФ. Кроме

того, один и тот же наклон СФ может возникать при разных физических механизмах, поэтому всегда полезно использовать и другие методы анализа, например АКФ.

## 2.2. Учет ошибок измерений

В реальных наблюдениях любой измеренный сигнал содержит не только истинную переменность излучения источника, но и шумы измерений. Даже если сигнал физически не меняется во времени,

ошибки измерений все равно создают ненулевую СФ. Это особенно важно учитывать при анализе слабых или малопеременных сигналов. СФ первого порядка измеренного сигнала  $F(t)$  всегда может быть разложена на два слагаемых:

$$D_{\text{obs}}^{(1)}(\tau) = D_{\text{signal}}^{(1)}(\tau) + 2\sigma_f^2, \quad (3)$$

где  $D_{\text{signal}}^{(1)}(\tau)$  — СФ истинного сигнала без шумов, а  $\sigma_f^2$  — дисперсия ошибок измерений. Как показано в разделе 2.1, на малых лагах СФ может выходить на плато, обусловленное шумами измерений. Формально этот вклад можно выразить через  $2\sigma_f^2$ .

На практике  $\sigma_f^2$  можно оценить разными способами. Если для каждой точки временного ряда известна индивидуальная ошибка измерения  $\sigma_i$ , то дисперсию шумов можно оценить как среднее значение квадратов этих ошибок. При отсутствии индивидуальных ошибок  $\sigma_f^2$  можно оценить по уровню плато СФ на малых лагах.

При заметном уровне шумов истинную СФ оценивают как

$$D_{\text{signal}}^{(1)}(\tau) = D_{\text{obs}}^{(1)}(\tau) - 2\sigma_f^2. \quad (4)$$

Если уровень ошибок несущественен, этим членом можно пренебречь. В этом случае формулы упрощаются, а уровень шумового плато на малых  $\tau$  оказывается пренебрежимо малым. Тем не менее даже при сильном сигнале стоит проверить, нет ли заметного шумового плато, чтобы избежать ошибок при интерпретации.

### 2.2.1. Математическая база для вычисления СФ

Для численной реализации СФ первого порядка необходимо учитывать неравномерность временного ряда, индивидуальные ошибки измерений и соответствующие веса наблюдений. Расчет проводится по формуле (1) с построением выборки пар точек на заданных лагах  $\tau$ , попадающих в допустимый временной интервал.

При этом важно иметь в виду, что данные могут содержать ошибки измерений, которые у разных точек могут быть разными. Чтобы точнее учесть вклад разных измерений, каждой точке можно присвоить вес  $w_i$ . Идея весов проста: если точка измерена с большой ошибкой, ей доверяют меньше и ее вес делают меньше. Если точка измерена очень точно, ее вес делают больше.

В классической статистике вес для точки обычно вычисляют так:

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}, \quad (5)$$

где  $\sigma_i$  — ошибка измерения в момент времени  $t_i$ . Чем больше ошибка, тем меньше вес. Если ошибок

измерений нет или они неизвестны, принято брать  $w_i = 1$  для всех точек. В этом случае считаем, что все измерения одинаково надежны.

В идеальной ситуации мы бы хотели находить пары точек с точно заданным интервалом  $\tau$  между измерениями. Например, ровно 20 дней. Но в реальных наблюдениях эпохи измерений не совпадают идеально с заданным  $\tau$ . Поэтому используют окно шириной  $2\Delta\tau$  вокруг каждого лага  $\tau$ . Это значит, что для заданного лага  $\tau$  рассматриваются все пары точек, для которых временной интервал лежит в диапазоне

$$\tau - \Delta\tau \leq |t_j - t_i| \leq \tau + \Delta\tau. \quad (6)$$

Как показано в разделе 2.2, ошибки измерений вносят вклад в наблюдаемую СФ, особенно при малых масштабах  $\tau$ . Для оценки статистической ошибки СФ можно использовать формулу (7), выведенную из стандартного подхода к распространению ошибок при усреднении квадратичных разностей:

$$\sigma^2(D^{(1)}(\tau)) \approx \frac{4}{N_{\text{pairs}}} \left[ \sigma_f^4 + \sigma_f^2 D^{(1)}(\tau) \right], \quad (7)$$

где  $\sigma_f^2$  — дисперсия ошибок измерений, а  $N_{\text{pairs}}$  — число пар точек, участвующих в вычислении. При незначительном вкладе шумов применяют упрощенную формулу:

$$\sigma(D^{(1)}(\tau)) \approx \sqrt{\frac{2 [D^{(1)}(\tau)]^2}{N_{\text{pairs}}}}. \quad (8)$$

Она часто используется для ярких и сильно переменных объектов, когда вклад шумов измерений невелик.

### 2.3. Пошаговый алгоритм расчета СФ

Алгоритм расчета СФ основан на описанных выше принципах (см. раздел 2.2.1). Ниже приведена пошаговая процедура для практической реализации.

- *Шаг 1. Подготовка данных.* Провести предварительную обработку временного ряда: исключить выбросы, привести времена к единой шкале. Если доступны индивидуальные ошибки измерений, рассчитать веса по формуле (5). В противном случае использовать равные веса.
- *Шаг 2. Определение лагов и временного окна.* Выбирают сетку масштабов (лагов)  $\tau$ . Шаг между лагами  $\Delta\tau$  часто берут равным среднему интервалу между соседними точками временного ряда. Максимальный лаг обычно выбирают равным примерно половине общей длительности наблюдений. Для каждого лага определяют окно шириной  $2\Delta\tau$ , в котором ищут пары точек.

- *Шаг 3. Перебор пар точек.* Проходят по всем возможным парам точек  $(i, j)$  в ряду. Для каждой пары вычисляют временной интервал:

$$\Delta t_{ij} = |t_j - t_i|. \quad (9)$$

Если  $\Delta t_{ij}$  попадает в окно, заданное для лага  $\tau$ , эту пару учитывают.

- *Шаг 4. Вычисление квадратов разностей.* Для всех выбранных пар вычисляют квадрат разности потока:

$$[F(t_j) - F(t_i)]^2. \quad (10)$$

- *Шаг 5. Усреднение разностей.* СФ для лага  $\tau$  вычисляется как взвешенное среднее всех квадратов разностей в выбранном окне. Итоговая формула имеет вид:

$$D^{(1)}(\tau) = \frac{\sum_{i < j} w_i w_j [F(t_j) - F(t_i)]^2}{\sum_{i < j} w_i w_j}, \quad (11)$$

где суммирование идет только по парам, попавшим в окно вокруг масштаба  $\tau$ . Если все веса равны единице, формула упрощается до обычного среднего квадратов разностей.

- *Шаг 6. Оценка ошибки СФ.* Ошибки СФ оцениваются по формулам (7) и (8). Выбор зависит от величины шумов. При этом число пар точек  $N_{\text{pairs}}$  берется равным числу пар, учтенных в суммах выше.
- *Шаг 7. Нормализация и построение графика.* СФ часто нормируют на дисперсию сигнала всего ряда, чтобы можно было сравнивать разные объекты или эпохи наблюдений:

$$\text{SF}_{\text{norm}}(\tau) = \frac{D^{(1)}(\tau)}{\sigma_{\text{signal}}^2}. \quad (12)$$

Здесь  $\sigma_{\text{signal}}^2$  — это дисперсия временного ряда плотностей потоков  $F(t)$ , вычисляемая по формуле

$$\sigma_{\text{signal}}^2 = \frac{\sum w_i (F_i - \bar{F})^2}{\sum w_i}, \quad (13)$$

где  $\bar{F}$  — взвешенное среднее плотности потока, а  $w_i$  — веса точек. При этом веса можно не использовать, если все измерения имеют примерно одинаковую точность или если ошибки малы по сравнению с амплитудой изменения сигнала. В таком случае дисперсию рассчитывают без весов:

$$\sigma_{\text{signal}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (F_i - \bar{F})^2. \quad (14)$$

Для анализа строят график зависимости  $\lg D^{(1)}(\tau)$  от  $\lg \tau$ . Наклон на этом графике помогает понять характер физического процесса: белый шум, случайный процесс или тренд.

#### 2.4. Преимущества метода СФ

1. *Работает с неравномерными данными.* Метод хорошо применим к временным рядам с различными интервалами между измерениями. В отличие от некоторых других методов, нет необходимости приводить данные к равномерной сетке.
2. *Устойчивость к выбросам.* СФ менее чувствительна к редким выбросам в данных, по сравнению с методами, основанными на Фурье-анализе. Это делает ее полезной при работе с переменными источниками, где могут встречаться редкие всплески яркости.
3. *Связь с физическими процессами.* Наклон графика СФ позволяет судить о характере временного процесса, лежащего в основе наблюдаемых изменений: например, различать белый шум, случайное блуждание или наличие тренда.

#### 2.5. Ограничения метода СФ

Метод СФ, несмотря на свою наглядность и простоту реализации, обладает рядом существенных ограничений, которые следует учитывать при интерпретации результатов.

1. *Ограничения на временные масштабы и длину ряда.* При больших лагах число пар точек резко уменьшается, что снижает статистическую надежность результатов. Анализ на временных масштабах, близких к временному масштабу измерений, становится невозможным. Пропуски в данных или разреженность измерений также могут привести к тому, что некоторые лаги останутся вовсе без статистики. Например, на панелях (e) и (f) рис. 2 показаны кривая блеска и СФ для блазара PKS J0339–0146 на частоте 22 ГГц. Видно, что СФ не достигает плато и продолжает расти на больших масштабах. Это связано с тем, что характерный временной масштаб переменности этого источника превышает длительность временного ряда. Кривая блеска объекта демонстрирует медленные изменения, которые продолжаются на протяжении всего периода наблюдений, поэтому СФ не насыщается.
2. *Влияние шумов и систематических ошибок.* Шумы измерений, а также систематические погрешности могут существенно исказить СФ. Особенно это заметно при малых  $\tau$ , где уровень СФ может завышаться за счет шумов, если они не вычтены.

3. *Эффект выборки.* СФ чувствительна к неполноте данных. Если временной ряд охватывает лишь отдельные периоды активности или содержит нетипичные участки, полученные значения могут не отражать поведение объекта в целом. Эту ситуацию иллюстрирует пример на панелях (g) и (h) рис. 2, где показана кривая блеска и СФ для блазара AO 0235+164. Кривая блеска оптического излучения содержит регулярные сезонные пропуски в измерениях. В результате СФ выглядит «рваной» и содержит резкие перепады между соседними масштабами. Это затрудняет определение характерных временных масштабов переменности и снижает надежность интерпретации СФ.
4. *Нестабильность метода в условиях сложной физики объекта.* Если переменность объекта создается несколькими процессами с разными временными масштабами, структурная функция может усреднить эти эффекты и их становится трудно различить. Кроме того, один и тот же наклон СФ может соответствовать разным физическим механизмам, что создает неоднозначность интерпретации.

### 3. ПЕРИОДОГРАММА ЛОМБА–СКАРГЛА

В астрономических наблюдениях часто встречаются неравномерные выборки данных, связанные с фактическими условиями измерений. Например, наблюдения проводятся только в отдельные ночи или зависят от погодных условий. При попытке применить к таким данным классические методы спектрального анализа, например дискретное преобразование Фурье (ДПФ), возникают следующие трудности:

- появление ложных пиков в спектре мощности (артефакты);
- неустойчивость результатов при пропусках данных;
- невозможность надежного определения спектра мощности для произвольных частот.

Чтобы решить эти задачи, был предложен метод Ломба–Скаргла (Lomb, 1976; Scargle, 1982). Он модифицирует классическую периодограмму Шустера (Schuster, 1898) таким образом, чтобы корректно вычислять спектр мощности даже при неравномерной выборке. Метод основан на подгонке синусоидальных функций к данным по методу наименьших квадратов, что обеспечивает большую устойчивость к пропускам и шумам в наблюдениях. Кроме того, существуют обобщенные версии метода (Generalized Lomb–Scargle periodogram, GLSP), учитывающие ошибки измерений и позволяющие более точно оценивать статистическую значимость обнаруженных сигналов (Zechmeister and Kürster, 2009).

Классический спектральный анализ временных рядов основан на разложении сигнала в ряд синусоидальных функций и вычислении спектра мощности через периодограмму Шустера. Однако такие методы предполагают равномерный шаг временной выборки. При наличии пропусков или неравномерной дискретизации классическая периодограмма становится ненадежной и создает артефакты в спектре мощности (Scargle, 1982).

Метод ЛС решает эту проблему, позволяя анализировать неравномерно отсэмплированные ряды без необходимости интерполяции данных на равномерную сетку. Его основная идея заключается в том, чтобы на каждой частоте  $f$  проверять возможность аппроксимации данных синусоидальной моделью:

$$y(t) = A \cos(2\pi ft) + B \sin(2\pi ft). \quad (15)$$

При равномерной выборке синусная и косинусная компоненты ортогональны. Однако при неравномерной дискретизации между ними может возникать взаимная корреляция. Для устранения этой корреляции в ЛС вводится фазовый сдвиг  $\tau$ , который вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg} 2\omega\tau = \frac{\sum_{i=1}^N \sin 2\omega t_i}{\sum_{i=1}^N \cos 2\omega t_i}, \quad (16)$$

где  $\omega = 2\pi f$ . Выбор  $\tau$  позволяет сделать синусную и косинусную функции ортогональными в пространстве неравномерно расположенных точек  $t_i$ . Таким образом, метод ЛС можно рассматривать как вычисление мощности сигнала на различных частотах через проекции временного ряда на ортогональные базисные функции. В отличие от классической периодограммы, ЛС-периодограмма устойчива к пропускам в данных и позволяет обнаруживать скрытые периодические компоненты в сигнале. Именно поэтому она стала стандартным инструментом анализа временных рядов в астрономии и других науках (VanderPlas, 2018).

#### 3.1. Математическая база ЛС

Как было показано во введении к данному разделу, метод ЛС основывается на аппроксимации временного ряда  $y(t)$  синусоидальной моделью с частотой  $f$ . В дальнейшем для удобства используем обозначение  $\omega = 2\pi f$ , переходя к угловой частоте. Тогда модель принимает вид:

$$y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + C, \quad (17)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  — параметры, определяемые методом наименьших квадратов по имеющемуся набору

наблюдений. Если временной ряд предварительно центрирован (то есть среднее значение уже вычленено,  $\bar{y} = 0$ ), свободный член  $C$  можно опустить. Тогда модель упрощается до уравнения (15).

После подстановки значения фазового сдвига  $\tau$  (16) синусоидальные компоненты аппроксимирующей модели становятся ортогональными в дискретной выборке. Это позволяет независимо оценивать параметры  $A$  и  $B$  и корректно вычислять проекции временного ряда на базисные функции. Значения этих проекций используются при построении ЛС.

Вычисление ЛС-периодограммы включает следующие шаги.

- *Шаг 1. Центрирование данных (если используется модель без  $C$ ).* Вычисление среднего значения временного ряда:

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y(t_i). \quad (18)$$

Вычисление дисперсии данных:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [y(t_i) - \bar{y}]^2. \quad (19)$$

Если применяется обобщенная версия (GLSP), свободный член  $C$  вычисляется на каждом шаге подгонки и предварительное центрирование данных не требуется.

- *Шаг 2. Вычисление фазового сдвига  $\tau$ .* Для каждой частоты  $\omega_j$  вычисляют величину  $\tau$  по формуле (16). Это позволяет устраниить смешанные члены вида  $\cos \times \sin$  в разложении сигнала.
- *Шаг 3. Вычисление весов проекций.* Для каждой частоты вычисляют суммы:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^N [y(t_i) - \bar{y}] \cos(\omega_j(t_i - \tau)), \\ Y &= \sum_{i=1}^N [y(t_i) - \bar{y}] \sin(\omega_j(t_i - \tau)), \\ C &= \sum_{i=1}^N \cos^2(\omega_j(t_i - \tau)), \\ S &= \sum_{i=1}^N \sin^2(\omega_j(t_i - \tau)). \end{aligned}$$

- *Шаг 4. Вычисление мощности периодограммы.* Мощность ЛС-периодограммы на частоте  $\omega_j$  вычисляется по формуле:

$$P(\omega_j) = \frac{1}{2\sigma^2} \left( \frac{X^2}{C} + \frac{Y^2}{S} \right). \quad (20)$$

Если используется обобщенная версия GLSP, в вычислениях учитываются индивидуальные

ошибки измерений и возможный свободный член  $C$  в модели (17) (Zechmeister and Kürster, 2009).

- *Шаг 5. Повторение цикла.* Повторяют шаги 2–4 для всех частот из заданной сетки. Результат — массив значений  $P(\omega)$ , который и составляет ЛС-периодограмму.

Коэффициент  $1/2$  в формуле мощности связан с тем, что для вещественного сигнала половина мощности приходится на положительные частоты, а половина — на отрицательные. Деление на дисперсию  $\sigma^2$  позволяет привести спектр к безразмерной величине, где значение  $P(\omega)$  отражает долю мощности, приходящуюся на данную частоту относительно общей переменности сигнала.

Для практического применения существуют готовые реализации метода ЛС в библиотеках `Astropy`, `scipy.signal.lombScargle`, в пакете `pyAstronomy`<sup>1</sup> и других.

### 3.2. Практические аспекты применения ЛС

*a. Выбор диапазона частот.* При анализе методом ЛС необходимо задать диапазон исследуемых частот:  $f_{\min} - f_{\max}$ . Для равномерной выборки верхний предел частотного анализа ограничивается так называемой частотой Найквиста, определяемой как

$$f_{\text{Ny}} = \frac{1}{2\Delta t},$$

где  $\Delta t$  — шаг дискретизации. Для неравномерной выборки строгого аналога предела Найквиста не существует. На практике часто используют среднюю частоту Найквиста:

$$f_{\text{Ny}} \approx \frac{1}{2\langle\Delta t\rangle},$$

где  $\langle\Delta t\rangle$  — средний интервал между наблюдениями. Например, при среднем интервале в двое суток  $f_{\text{Ny}} \approx 0.25$  циклов в сутки.

Рекомендуется исследовать частоты вплоть до 2–3 раз выше средней частоты Найквиста. Например, если  $\langle\Delta t\rangle = 2$  суток, то  $f_{\text{Ny}}^{\text{avg}} \approx 0.25$  циклов в сутки, и анализ целесообразно проводить до 0.5–0.75 циклов в сутки. Это позволяет учесть возможные высокочастотные сигналы, которые могут присутствовать в данных благодаря участкам с плотными измерениями. Однако при анализе таких частот необходимо внимательно проверять физическую обоснованность найденных максимумов, так как возрастает риск появления артефактов наложения частот (aliasing).

<sup>1</sup><https://pyastronomy.readthedocs.io/en/latest/pyTimingDoc/pyPeriodDoc/gls.html>

*b. Выбор шага по частоте.* Для надежного выявления узких пиков частотная сетка должна быть достаточно плотной. Обычно выбирают плотность сетки в 4–10 раз выше минимально необходимой, чтобы на каждый пик приходилось несколько точек. Например, если предполагаемая ширина пика составляет 0.01 циклов в сутки, рекомендуется шаг не более 0.0025 циклов в сутки. Избыточно плотная сетка увеличивает время вычислений и практически не улучшает точность обнаружения пиков.

*c. False Alarm Probability (FAP).* Для оценки статистической значимости найденных пиков используется вероятность ложной тревоги (False Alarm Probability — FAP), показывающая, какова вероятность появления пика в спектре при отсутствии реального периодического сигнала. При белом гауссовском шуме приближенная формула (Scargle, 1982) имеет вид:

$$FAP \approx 1 - [1 - \exp(-z)]^{N_{\text{ind}}},$$

где  $z$  — высота максимума периодограммы, а  $N_{\text{ind}}$  — число независимых частотных испытаний. Например, для  $z = 10$  и  $N_{\text{ind}} = 1000$

$$FAP \approx 1 - (1 - e^{-10})^{1000} \approx 0,$$

что говорит о крайне малой вероятности случайного максимума.

Однако при наличии красного шума (red noise), то есть временной корреляции данных, формула для белого шума становится некорректной. В таких случаях рекомендуется применять специализированные методы, например программу **REDFIT** (Schulz and Mudelsee, 2002), которая:

- подгоняет к данным AR(1)-модель для описания красного континуума;
- выполняет моделирование Монте-Карло;
- сравнивает наблюдаемую мощность пиков с распределением мощностей в синтетических рядах.

Это позволяет учесть автокорреляцию в данных и корректно оценить вероятность ложных пиков.

*d. Артефакты и оконная функция.* Чтобы избежать влияния регулярных оконных эффектов (например, суточных или годовых пиков), рекомендуется:

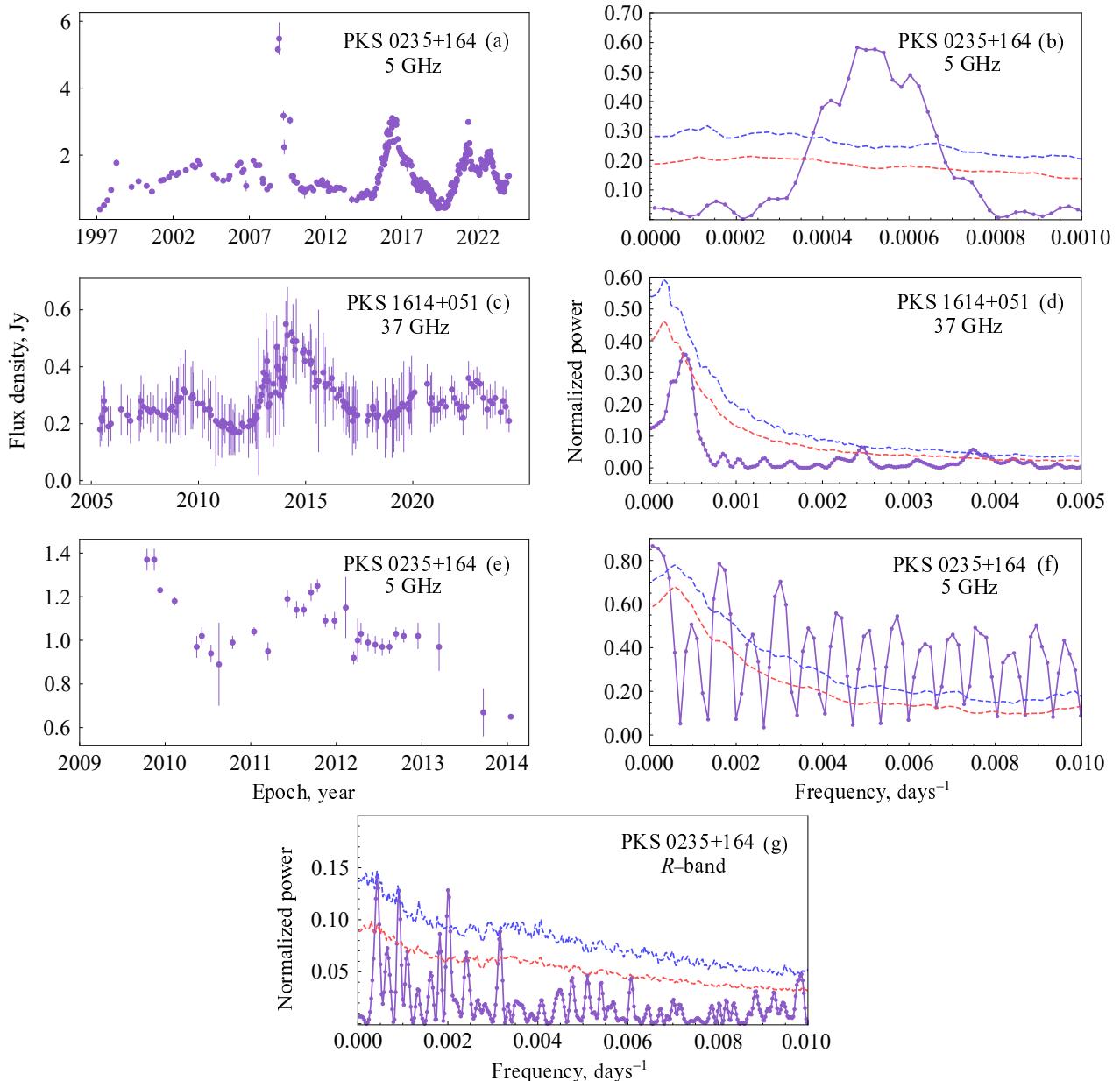
- анализировать спектр оконной функции;
- ограничивать диапазон исследуемых частот, опираясь на физические свойства объекта;
- проверять устойчивость найденного пика при изменении параметров сетки частот или диапазона анализа.

При обнаружении пиков, совпадающих с известными периодами наблюдений (например, одни сутки или один год), необходимо тщательно оценивать их физическую правдоподобность. На рис. 3b показан пример периодограммы ЛС, где отчетливо виден узкий устойчивый пик на частоте около 0.0005, что соответствует примерно пяти годам. Такой максимум может свидетельствовать о наличии реального периодического сигнала. Его форма, высота и положение позволяют отличить его от случайных флюктуаций или артефактов, возникающих, например, из-за оконной функции или неравномерности данных.

### 3.3. Преимущества метода ЛС

Метод ЛС обладает рядом существенных преимуществ:

1. *Устойчивость к неравномерной выборке данных.* Одним из главных преимуществ ЛС является способность эффективно работать с временными рядами, в которых интервалы между точками наблюдений различны. Классические методы анализа, такие как ДПФ, требуют равномерного шага выборки и подвержены сильным артефактам при анализе неравномерных данных. ЛС решает эту проблему, вводя обобщение метода наименьших квадратов для оценки мощности спектра. Этот метод устойчив к артефактам (ложным обнаружениям), связанным с пропусками или неравномерностью данных, и позволяет надежно обнаруживать периодические сигналы.
2. *Отсутствие необходимости интерполяции.* ЛС анализирует исходные, неравномерно отсэмплированные данные напрямую, без необходимости интерполировать их на равномерную сетку. Это предотвращает внесение дополнительных искажений или ложных обнаружений в спектр мощности.
3. *Корректное обращение с шумами и неопределенностями.* ЛС может учитывать веса точек в зависимости от ошибок их измерений. В классическом ДПФ предполагается, что данные равномерны и имеют одинаковую точность. В отличие от этого, ЛС позволяет учитывать различия в надежности измерений, что особенно важно для реальных астрономических данных с переменным качеством наблюдений (Press and Rybicki, 1989).
4. *Корректный учет фазового сдвига.* ЛС вводит фазовый параметр  $\tau$ , который устраняет взаимную корреляцию между синусной и косинусной компонентами в разложении сигнала. Это повышает точность вычислений и устойчивость метода к ложным пикам.



**Рис. 3.** Кривые блеска (слева) и периодограммы ЛС (справа): (а) и (б) — для блазара АО 0235+164 на 5 ГГц — пример данных, где четко виден пик длительностью пять лет на ЛС; (с) и (д) — для блазара PKS 1614+051 на 37 ГГц, который демонстрирует эффект aliasing — появление ложных пиков, связанных с наложением частот при неравномерной выборке; (е) и (ф) — для АО 0235+164 на 5 ГГц (спокойный период без вспышек) показано наличие шумовых флюктуаций, которые могут приводить к ложноположительным пикам даже при отсутствии реального периодического сигнала; (г) — для АО 0235+164 в оптическом диапазоне демонстрируется влияние оконной функции наблюдений, в частности появление ложных пиков, связанных с сезонными окнами наблюдений. Кривая блеска этого объекта представлена на рис. 2г. Везде на периодограммах ЛС красные и синие линии показывают 1% и 5% FAP соответственно.

5. *Гибкость нормировки.* Метод ЛС может использовать схемы нормировки на общую дисперсию данных, на мощность шума, что позволяет удобно сопоставлять результаты различных исследований и использовать физически осмысленные шкалы мощности.
6. *Работа с большими объемами данных.* ЛС эффективно рассчитывается для больших временных рядов.

менных рядов. Существуют оптимизированные алгоритмы с временной сложностью  $\mathcal{O}(N \lg N)$  (Press and Rybicki, 1989), что делает метод применимым к большим обзорам и массивам данных.

7. *Байесовская интерпретация.* ЛС может быть интерпретирован в байесовских терминах, что делает его мощным инструментом для анализа

данных в условиях неопределенности и при отсутствии полной информации о природе сигнала. В байесовском контексте ЛС оказывается оптимальным методом для выявления стационарных синусоидальных сигналов в присутствии гауссовского шума (VanderPlas, 2018).

### 3.4. Ограничения метода ЛС

Несмотря на многочисленные достоинства, метод ЛС имеет ряд ограничений, которые следует учитывать при его применении:

1. *Возможность aliasing.* При анализе неравномерных временных рядов метод ЛС подвержен эффекту aliasing, когда сигнал одной частоты может интерпретироваться как сигнал на другой частоте. В классических равномерных данных предел Найквиста однозначно определяет максимальную частоту, которую можно надежно различить. Для неравномерной выборки этот предел становится менее строгим. В результате периодограмма ЛС может содержать псевдопики, которые не отражают реальную физическую природу сигнала. Чтобы минимизировать aliasing, необходимо тщательно выбирать диапазон исследуемых частот, основываясь на физике объекта и характеристиках выборки данных. Пример такого наложения показан на рис. 3d.
2. *Влияние шумов и ложноположительных сигналов.* Шум и статистическая неопределенность наблюдений могут значительно исказять спектр мощности. Особенно опасны ложноположительные пики, которые могут возникнуть как следствие случайных флюктуаций данных или систематических эффектов. В случаях, когда данные содержат коррелированные ошибки или медленные тренды, классический метод ЛС (в предположении белого шума) может переоценивать значимость найденных периодов. Пример влияния шумов на периодограмму приведен на рис. 3f.
3. *Наличие красного шума в данных.* При анализе световых кривых АЯГ шум в данных имеет характер красного шума, то есть обладает временной автокорреляцией. Максимальный вклад красного шума проявляется на низких частотах, что создает ложное обнаружение долгопериодических компонент сигнала. Применение классической формулы FAP, выведенной для белого шума, в таких случаях становится некорректным и может приводить к переоценке значимости пиков. Для учета красного шума рекомендуется использовать специализированные методы.

4. *Влияние оконной функции наблюдений.* Окночная функция наблюдений, связанная с регулярными интервалами пропусков данных (например, дневной или сезонной недоступностью объекта), может вносить ложные пики в периодограмму. Часто наблюдаются пики с периодами, совпадающими с одним днем или одним годом, что связано не с физической природой источника, а с режимом наблюдений (VanderPlas, 2018). Для исключения таких артефактов рекомендуется анализировать спектр оконной функции и проверять физическую обоснованность обнаруженных периодов. Пример проявления сезонного ложного сигнала показан на рис. 3g. На периодограмме виден пик около 0.002, что соответствует  $P \approx 1.5$  года, который, скорее всего, обусловлен сезонной структурой наблюдений, а не реальной периодичностью в источнике.

## 4. МЕТОД И АЛГОРИТМЫ КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

### 4.1. Дискретная корреляционная функция: описание и алгоритм построения

Как уже упоминалось выше, данные астрономических наблюдений чаще всего неравномерны по ряду причин. И в некоторых работах (например, Gaskell and Sparke, 1986; Gaskell and Peterson, 1987; Alloin et al., 1988) выполнялось построение АКФ или ВКФ по интерполированным исходным данным. В работе Edelson and Krolik (1988) показано, что корреляционные ошибки часто вызывают ложный пик при нулевой задержке и оценить стандартную корреляционную ошибку для интерполированной функции невозможно.

Авторы Edelson and Krolik (1988) использовали метод дискретной корреляционной функции (discrete correlation function — DCF) для исследований свойств неравномерных данных наблюдений. Интерполяция для его применения не требуется, так как корреляционная функция определяется только для тех временных масштабов (интервалов задержки), для которых существуют измеренные данные. Также метод DCF дает надежные оценки ошибок и позволяет избежать ложных характеристик, вызванных ошибками корреляции.

Для двух непрерывных, статистически стационарных стохастических функций  $a(t)$  и  $b(t)$  классическая корреляционная функция определяется как

$$CF(\tau) = \frac{E\{[a(t) - \bar{a}][b(t + \tau) - \bar{b}]\}}{\sigma_a \sigma_b}, \quad (21)$$

где  $\tau = \Delta t$  — это временной интервал задержки между двумя точками шкалы времени,  $t_i$  и  $t_j$ , для

которых вычисляется корреляция.  $E\{f\}$  — математическое ожидание непрерывной функции  $f$ ,  $\bar{f}$  — ее среднее арифметическое, а  $\sigma_f$  — ее стандартное отклонение. При  $a(t) = b(t)$  вычисляется АКФ, при  $a(t) \neq b(t)$  — ВКФ.

DCF определяется следующим образом: для двух последовательностей дискретных данных  $a$  и  $b$  рассчитывается набор несинхронизированных дискретных корреляций

$$\text{UDCF}_{ij} = \frac{(a_i - \bar{a})(b_j - \bar{b})}{\sqrt{(\sigma_a^2 - e_a^2)(\sigma_b^2 - e_b^2)}} \quad (22)$$

для всех пар  $(a_i, b_j)$ . Каждой из них соответствует интервал задержки  $\Delta t_{ij} = t_j - t_i$ . Параметр  $e_f$  — это ошибка измерения, связанная с набором данных  $f$ . Процедура расчета DCF автоматически исключает коррелированные ошибки с нулевым запаздыванием, которые возникают для интервалов задержки  $\Delta t_{ij}$  с  $i = j$ . Чтобы получить коэффициент корреляции для каждого  $\tau = \Delta t_{ij}$ , сумма всех  $\text{UDCF}_{ij}$  по интервалу усредняется на количество пар данных  $M$ :

$$\text{DCF}(\tau) = \frac{1}{M} \sum \text{UDCF}_{ij}. \quad (23)$$

Фактически алгоритм расчета дискретной корреляционной функции сводится к получению набора точек с координатами  $[\tau, \text{DCF}(\tau)]$ , где для каждой временной задержки  $\tau$ , увеличивающейся линейно, рассчитывается набор  $\text{UDCF}_{ij}$  для всех имеющихся  $M$  пар исходных данных  $(a_i, b_j)$ . Если  $a_i$  или  $b_j$  отсутствует, такие пары исключаются из рассмотрения.  $\text{DCF}(\tau)$  по сути является усредненной суммой всех  $\text{UDCF}_{ij}$  для каждой задержки и будет равна нулю для задержки, на которой отсутствуют исходные данные.

Стандартная ошибка для DCF определяется как

$$\sigma_{\text{DCF}}(\tau) = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum [\text{UDCF}_{ij} - \text{DCF}(\tau)]^2}. \quad (24)$$

Там, где UDCF имеет большой разброс по точкам или где есть несколько независимых точек, вносящих вклад в интервал,  $\sigma_{\text{DCF}}$  будет большой; там, где мало разброса и много точек,  $\sigma_{\text{DCF}}$  мала.

Выбор начального значения задержки  $\tau_1$ , как и приращения  $\Delta\tau$ , регулируется компромиссом между стремлением к высокой точности  $\text{DCF}(\tau)$  и желанием уравновесить разрешение в отображении кривой корреляции. Рекомендуется ориентироваться на приблизительный средний интервал между данными наблюдений и выбирать  $\Delta\tau$  равным ему или в полтора—два раза больше, так как выбор очень маленького интервала задержки приведет к появлению неоднозначностей, случайных

отскоков и больших ошибок корреляции, а слишком большого — к низкой точности результата.

При выборе максимальной задержки  $\tau_{\max}$  следует ориентироваться на общий временной промежуток исходного ряда. Обычно значимые результаты обнаруживаются в интервале времени  $[0; \tau_{\max}/2]$ , поэтому не имеет смысла рассчитывать корреляционную функцию для более длинных временных промежутков.

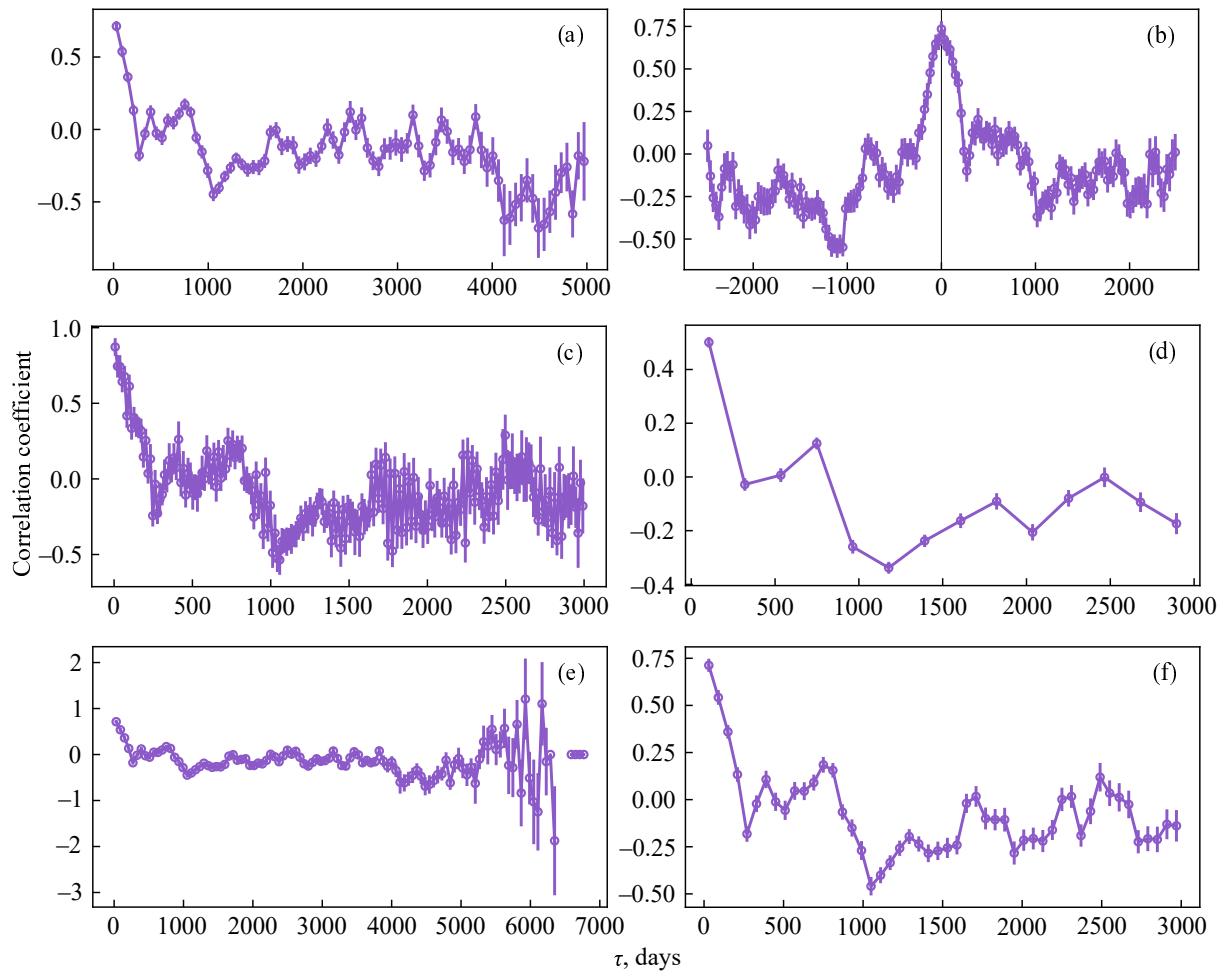
На рис. 4а, б изображены графики корреляционных функций, построенные для исходной последовательности и для данных, полученных в процессе интерполяции (штриховые линии). Из полученных данных можно сделать вывод, что при использовании алгоритма дискретной корреляционной функции нет необходимости в предварительной интерполяции.

Средний временной промежуток между наблюдениями для источника ЗС 454.З составляет порядка 30 дней. Из рис. 4с, являющегося результатом расчетов с  $\Delta\tau = 15$  дней, однозначно можно сделать вывод, что такой интервал задержки слишком короткий, в результате чего в АКФ увеличиваются ошибки корреляции, а также могут возникать отскоки и разрывы. Из значений АКФ с  $\Delta\tau = 210$  дней, показанной на рис. 4д, можно почерпнуть только общую информацию о периодичности поведения исходной выборки, а значение масштаба переменности можно посчитать только приблизительно. Рисунок 4а с  $\Delta\tau = 60$  дней показывает достаточную точность расчетов и маленькие ошибки корреляции.

На рис. 4е и 4ф показано влияние выбора  $\tau_{\max}$ . Временной промежуток наблюдений исходного ряда составляет порядка 7000 дней. Рисунок 4е отображает рост ошибок корреляции на значениях  $\tau > 4000$  дней. Максимальный временной интервал для анализа для данного источника составляет порядка 2500 дней, поэтому не имеет смысла строить график для  $\tau > 4000$  дней. Подобный прием никак не влияет на результаты анализа, но улучшает восприятие результатов.

График АКФ симметричен, поэтому достаточно рассчитать АКФ только на интервале  $[0; \tau_{\max}]$ . Для ВКФ рассматривается интервал, близкий к  $[-\tau_{\max}; \tau_{\max}]$ .

При расчете ВКФ время задержки между кривыми блеска разных частот можно получить только приблизительно. Так, при расчете ВКФ с результатами рис. 4б получается нулевая задержка между частотами. Но при построении ВКФ для разных  $\Delta\tau$ , либо смещения границы  $\tau_{\max}$  можно определить, что задержка не является нулевой, в данном случае она близка к 30 дням.



**Рис. 4.** Дискретная корреляционная функция для радиоисточника 3C 454.3 (а) автокорреляция на частоте 22 ГГц с  $\Delta\tau = 60$  дней; (б) кросс-корреляция для частот 22–11 ГГц с  $\Delta\tau = 60$  дней; (с) автокорреляция на частоте 22 ГГц с  $\Delta\tau = 15$  дней; (д) автокорреляция на частоте 22 ГГц с  $\Delta\tau = 210$  дней; (е) автокорреляция на частоте 22 ГГц с  $\tau_{\max} = 6800$  дней; (ф) автокорреляция на частоте 22 ГГц с  $\tau_{\max} = 3000$  дней. Штриховая кривая — с применением интерполяции.

Пакет для расчета дискретной корреляционной функции `pydcf` доступен к скачиванию из репозитория GitHub<sup>2</sup>, автор D. Robertson.

#### 4.2. Интерпретация метода дискретной корреляционной функции

Корреляционная функция используется для получения значений периода сигнала (в случае автокорреляции) и при исследовании задержки в поведении источника на разных частотах (взаимная корреляция).

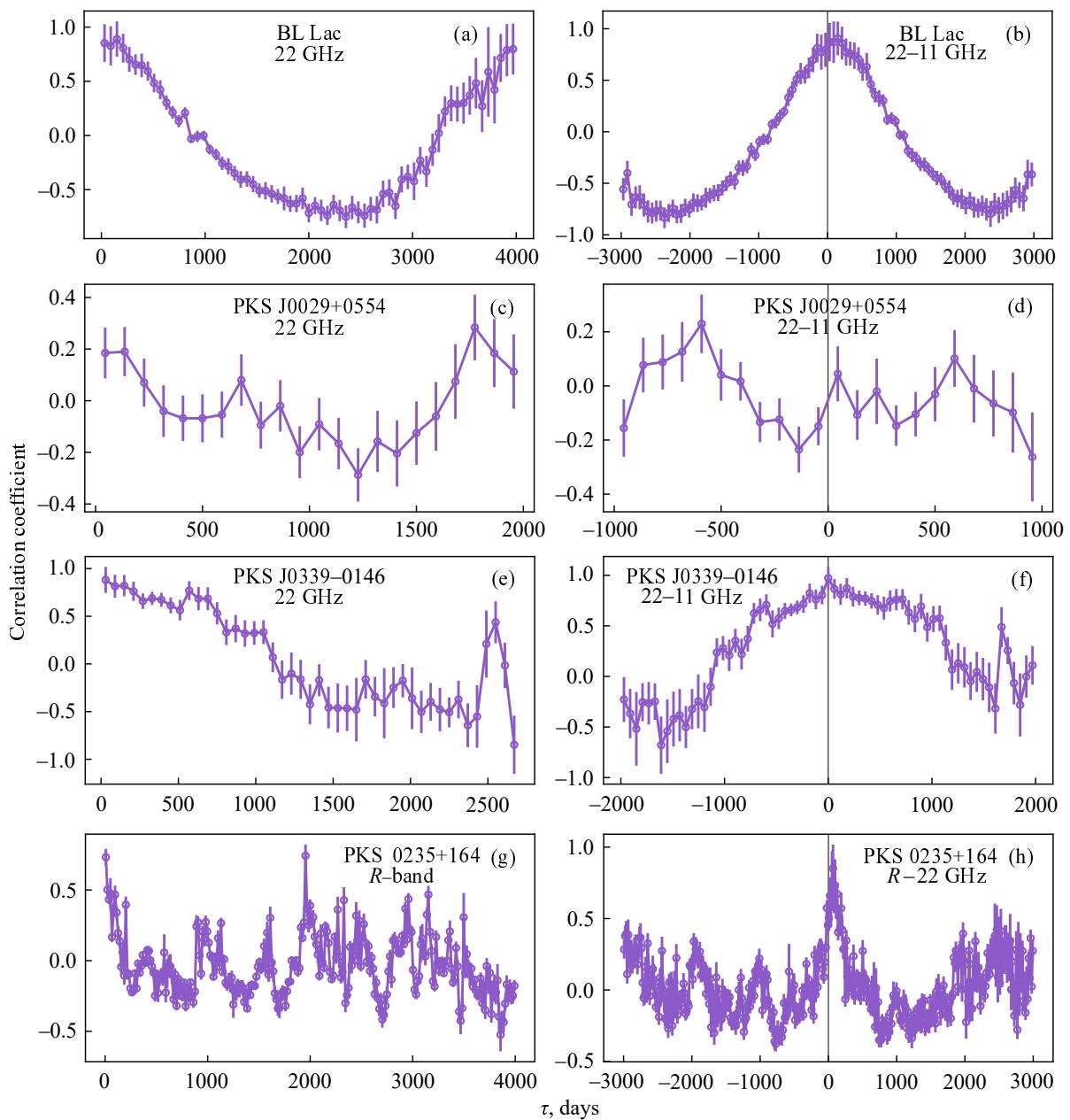
##### 4.2.1. Автокорреляционная функция

Задержка  $\tau$  с минимальным значением корреляционной функции составляет полупериод исходной последовательности, так как при таком сдвиге значения исходной и сдвигаемой кривых блеска

противоположны (например, исходная находится на максимуме, а сдвигаемая — на минимуме, или наоборот).

В таблице 1 приведены полученные значения АКФ коэффициентов  $acf_{\min}$ , соответствующих им задержек  $\tau_{acf}$  и периодов для представленных на рис. 5 источников. Источники BL Lac (а), PKS J0339–0146 (е) и AO 0235+164 (г) демонстрируют достаточно высокий уровень автокорреляции, но только (а) подтверждает вывод о периодичности поведения кривой блеска данного источника. Ошибки корреляции растут с ростом  $\tau$ . Значения периодов (е) и (г) очень велики и составляют более половины общего временного интервала исходной последовательности данных. АКФ (е) имеет слабые колебания (около  $acf = -0.5$ ) на интервале  $\tau_{acf} = [1500; 2500]$ , а (г) — в промежутке  $acf = (-0.25; 0.25)$  на всем протяжении оси  $\tau$  с несколькими яркими отскоками. Источник GB6 J0029+0554 (с) показывает

<sup>2</sup><https://github.com/astromerdamo/pydcf>



**Рис. 5.** Дискретная корреляционная функция для источников: (а) АКФ BL Lac на частоте 22 ГГц,  $\Delta\tau = 60$  дней; (б) ВКФ BL Lac для частот 22–11 ГГц с  $\Delta\tau = 60$  дней; (в) АКФ GB6 J0029+0554 на частоте 22 ГГц,  $\Delta\tau = 90$  дней; (г) ВКФ GB6 J0029+0554 для частот 22–11 ГГц с  $\Delta\tau = 90$  дней; (е) АКФ PKS J0339–0146 на частоте 22 ГГц с  $\Delta\tau = 60$  дней; (ж) ВКФ для частот 22–11 ГГц с  $\Delta\tau = 60$  дней; (ж) АКФ АО 0235+164 для данных в оптическом диапазоне с  $\Delta\tau = 15$  дней; (и) ВКФ АО 0235+164 для частот  $R$ –22 ГГц с  $\Delta\tau = 15$  дней.

**Таблица 1.** Результаты использования метода дискретной корреляционной функции

Источник	$\Delta\tau$ , дни	$acf_{min}$	$\tau_{acf}$ , дни	Период, годы	$ccf_{max}$	$\tau_{ccf}$ , дни
3C 454.3	60	-0.45	1050	5.75	0.75	30
BL Lac	60	-0.75	2360	12.93	0.87	30
GB6 J0029+0554	90	-0.28	1230	6.70	0.23	-600
PKS J0339–0146	60	-0.64	2370	12.99	0.97	30
AO 0235+164	15	-0.52	3860	21.15	0.79	60

слабую автокорреляцию и достаточно высокие ошибки корреляции для всех  $\tau$ .

#### 4.2.2. Взаимная корреляционная функция

Для получения задержки между частотами из данных взаимной корреляции берется  $\tau$  с максимальным значением  $ccf_{\max}$ .

В таблице 1 показаны значения взаимной корреляции  $ccf_{\max}$  и задержек между частотами  $\tau_{ccf}$  для представленных на рис. 5 источников. Можно сделать вывод, что кривые блеска разных частот источников BL Lac (b), PKS J0339–0146 (e) и AO 0235+164 (h) коррелируют между собой, а поведение GB6 J0029+0554 (d) на разных частотах некоррелировано.

#### 4.3. Оценка статистической значимости корреляционных характеристик временных рядов

В практике астрономических наблюдений часто производится вычисление кросс-корреляционной функции между двумя кривыми блеска на разных частотах или в фотометрических полосах  $UBVR$  для нахождения временных лагов, по которым можно сделать выводы о физических процессах, проходящих в исследуемых объектах. При этом возникает необходимость оценки статистической значимости полученной дискретной кросс-корреляционной функции  $DCF(\tau)$  (уравнение (23)). Для таких оценок часто используется методика Монте-Карло, когда определяются статистические свойства распределения отсчетов в исследуемых кривых блеска, и потом создается большое количество пар модельных кривых блеска с такими же статистическими свойствами, которые кросс-коррелирующих между собой. Далее для полученных взаимных корреляций  $DCF(\tau)$  на каждом временном масштабе или лаге строится распределение отсчетов, позволяющее определить доверительный интервал, в пределах которого с заданной вероятностью реализуется случайная корреляция между этими двумя кривыми блеска.

Простейший метод моделирования кривых блеска, учитывающий только форму спектральной плотности мощности (СПМ, или PSD — power spectral density), описан в работе Timmer and König (1995). Однако предположение о Гауссовой природе стохастического процесса для кривых блеска не всегда соответствует действительности, и для моделирования временных рядов предложены другие методики, например в работе Schreiber and Schmitz (1996). В статье Emanoulopoulos et al. (2013) вышеизложенные методы были модифицированы и применены для моделирования правдоподобных кривых блеска блазаров и АЯГ как в радио-, так и в рентгеновском и гамма-диапазонах, с учетом не-Гауссности, например в случае пуассоновской

статистики. Ниже рассматривается методика из этой статьи, которая далее будет использована для оценки статистической значимости взаимной корреляции кривых блеска  $\gamma$ -блазара ЗС 454.3.

#### 4.3.1. Моделирование кривых блеска

Рассмотрим некоторую кривую блеска  $x_{\text{obs}}(t)$ , состоящую из  $N$  отсчетов, с равномерным шагом по времени  $\Delta t$ ,  $\{t_i, x_{\text{obs}}(t_i)\}$  для  $i = 1, 2, \dots, N$ . Эта кривая блеска характеризуется некоторой спектральной плотностью мощности (СПМ),  $\mathcal{P}(f)$ , и наблюдаемой, или родительской, функцией плотности вероятности (ФПВ, или PDF/probability density function), PDF  $[0 \leq x_{\text{obs}}(t) < \infty]$ .

Как показано в исходной статье, спектральная плотность мощности кривых блеска, получаемых в процессе наблюдений АЯГ, оптимальнее всего описывается двухкомпонентной функцией, которая содержит степенную компоненту и константу, относящуюся к Пуассоновскому процессу:

$$\mathcal{P}(f; \vec{\gamma}, c) = \frac{Af^{-\alpha_{\text{low}}}}{1 + (f/f_{\text{bend}})^{\alpha_{\text{high}} - \alpha_{\text{low}}}} + c, \quad (25)$$

где  $f$  — частота,  $c$  — константа, характеризующая уровень шума по Пуассону. Вектор  $\vec{\gamma} = \{A, f_{\text{bend}}, \alpha_{\text{low}}, \alpha_{\text{high}}\}$  содержит параметры, характеризующие модель спектральной плотности мощности: нормировку, частоту перегиба и наклон СПМ на низких и высоких частотах.

Также авторы продемонстрировали, что для описания функции плотности вероятности можно использовать двухкомпонентную форму ФПВ, включающую гамма-распределение,  $\Gamma(\kappa, \theta)$  с параметрами  $\kappa$  и  $\theta$ , определяющими форму и масштаб, и логнормальное распределение,  $\ln \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , с параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2$ , определяющими среднее и дисперсию отсчетов в кривой блеска. Каждая компонента дает свой вклад в общую ФПВ распределения отсчетов,  $f_{\text{mix}}(x; \vec{\eta})$ , с весовыми коэффициентами  $w_{\Gamma}$  и  $w_{\ln \mathcal{N}} = 1 - w_{\Gamma}$  соответственно, где вектор  $\vec{\eta}$  содержит параметры такой модели,  $\vec{\eta} = \{\kappa, \theta, \mu, \sigma, w_{\Gamma}\}$ :

$$f_{\text{mix}}(x; \vec{\eta}) = w_{\Gamma} \frac{\theta^{-\kappa} e^{-x/\theta} x^{\kappa-1}}{\Gamma(\kappa)} + w_{\ln \mathcal{N}} \frac{e^{-(\ln x - \mu)^2 / (2\sigma^2)}}{\sqrt{2\pi} x \sigma}. \quad (26)$$

Для поиска значений параметров, входящих в уравнения (25) и (26), используются методы численной оптимизации, например метод Левенберга–Марквардта (Moré, 1978), который реализован в большом количестве пакетов для численного моделирования, таких, как SciPy для Python. Отметим, что и СПМ (уравнение (25)), и

ФПВ (уравнение (26)) могут представлять из себя и другие модели, отличные от вышеприведенных, и в этом случае для определения параметров таких моделей также можно применять методы численной оптимизации.

Итак, для моделирования кривых блеска, имеющих сходные СПМ и ФПВ, используется следующий итерационный алгоритм.

1. По методике, описанной в работе Timmer and König (1995), создается модельная кривая блеска с нормальным распределением,  $x_{\text{norm}}(t)$ , состоящая из  $N$  значений и имеющая спектральную плотность мощности, которая идентична  $\mathcal{P}(f)$ . Далее для каждой гармоники  $f_j$  выполняется дискретное Фурье-преобразование  $\text{DFT}_{\text{norm}}(j)$  и определяются соответствующие амплитуды  $\mathcal{A}_{\text{norm}}(j)$ , фазы  $\phi_{\text{norm}}(j)$ , а также строится периодограмма  $P_{\text{norm}}(f_j)$ , соответствующая начальной форме спектральной плотности мощности  $\mathcal{P}(f)$ .
2. С использованием начальной функции плотности вероятности PDF  $[0 \leq x_{\text{obs}}(t) < \infty]$  генерируется набор  $N$  псевдослучайных чисел, который соответствует белому шуму,  $x_{\text{sim},1}(t)$ . Далее от этого набора данных берется дискретное преобразование Фурье,  $\text{DFT}_{\text{sim},1}(j)$ , и определяются амплитуды  $\mathcal{A}_{\text{sim},1}(j)$ , фазы  $\phi_{\text{sim},1}(j)$  и строится периодограмма  $P_{\text{sim},1}(f_j)$ , имеющая постоянный уровень, так как она соответствует реализации белого шума.
3. Следующий шаг — это подстройка спектра, когда для каждой частоты  $f_j$  амплитуды  $\mathcal{A}_{\text{sim},1}(j)$  заменяются на  $\mathcal{A}_{\text{norm}}(j)$ , а фазы  $\phi_{\text{sim},1}(j)$  остаются неизменными. С помощью обратного Фурье-преобразования далее получается модифицированная последовательность отсчетов  $x_{\text{sim},\text{adjust},1}(t)$ , которая характеризуется спектральной плотностью мощности, идентичной заданной,  $\mathcal{P}(f)$ , но имеет функцию плотности вероятности, отличную от PDF  $[0 \leq x_{\text{obs}}(t) < \infty]$ .
4. На шаге подстройки амплитуд значения отсчетов  $x_{\text{sim},\text{adjust},1}(t)$  заменяются на отсчеты из  $x_{\text{sim},1}(t)$  таким образом, что максимальное значение из первой выборки заменяется на максимальное значение из второй выборки, затем максимальное из оставшихся значений из первой выборки заменяется на максимальное из оставшихся во второй и т.д. В результате полученная последовательность  $x_{\text{sim},2}(t)$  будет характеризоваться такой же функцией плотности вероятности, как и заданная PDF  $[0 \leq x_{\text{obs}}(t) < \infty]$ , но спектральная плотность мощности будет отличаться от  $\mathcal{P}(f)$ .

5. Этот процесс повторяется итерационным образом  $\kappa$  раз, пока результат не сойдется:  $x_{\text{sim},\kappa+1}(t) \equiv x_{\text{sim},\kappa}(t)$ .

Скорость схождения алгоритма зависит от таких параметров, как размер исходной выборки, а также формы СПМ и ФПВ. Пакет программ для моделирования кривых блеска с модулем **DELightcurveSimulation** можно загрузить с репозитория GitHub<sup>3</sup>.

#### 4.3.2. Пример работы алгоритма для кривых блеска блазара ЗС 454.3

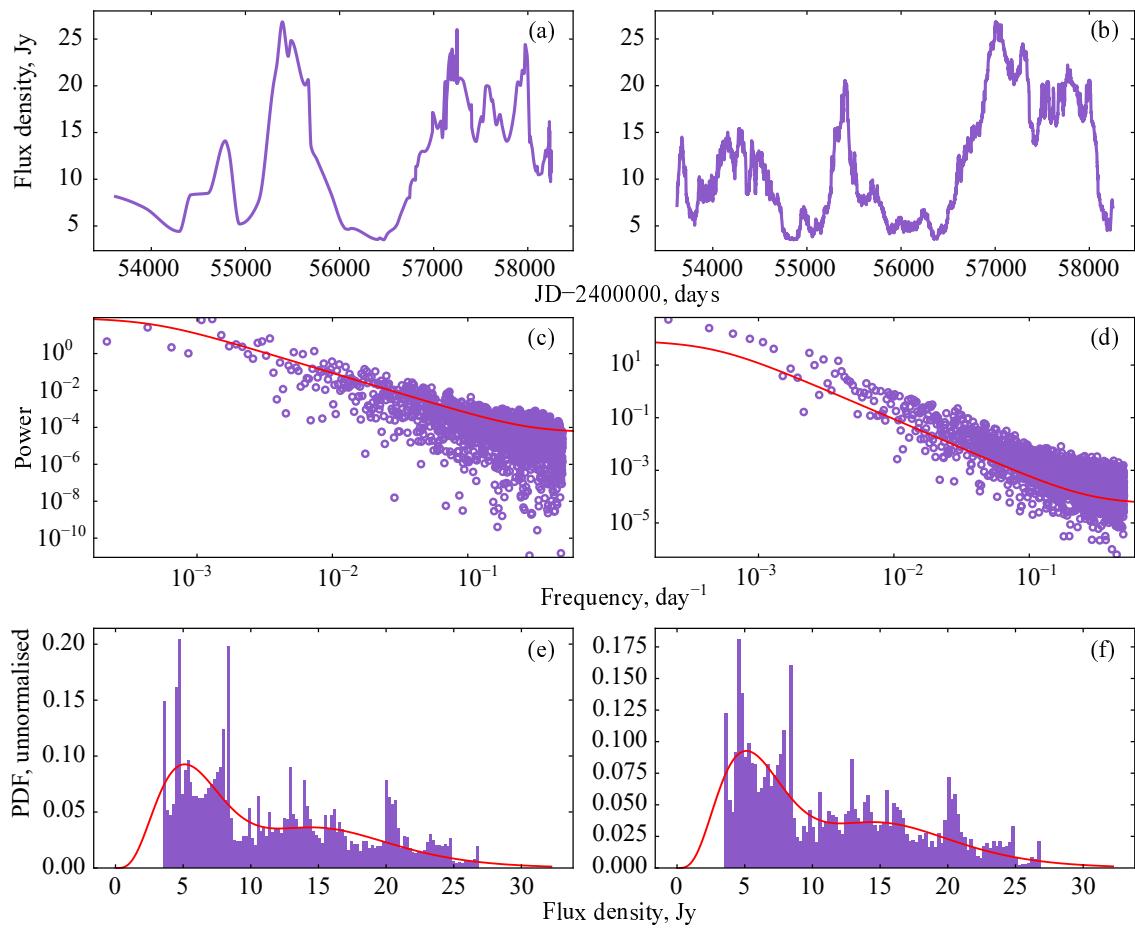
Блазар ЗС 454.3 является одним из самых ярких источников  $\gamma$ -излучения и характеризуется одним из самых больших значений светимости, когда-либо наблюдавшихся. Существуют длинные ряды наблюдений этого блазара в различных диапазонах, в том числе и в радиодиапазоне, где хорошо прослеживается вспышечная активность. Для иллюстрации методики моделирования кривых блеска был выбран длинный ряд наблюдений, которые проводились на РАТАН-600 на частоте 22 ГГц в течение 2006–2018 гг., а также оптические данные в полосе  $R$ , полученные на телескопах LX-200 (40-см, СПбГУ, г. Петергоф) и АЗТ-8 (70-см, Крымская астрофизическая обсерватория, п. Научный) (Jorstad et al., 2010).

Для проведения моделирования неэквидистантный временной ряд наблюдений был интерполирован с шагом в один день по методу Стеффена (Steffen, 1990). Далее с использованием модуля **DELightcurveSimulation** были определены статистические характеристики уже интерполированного временного ряда и в соответствии с ними было сгенерировано большое количество модельных кривых блеска. Исходная кривая блеска и пример модельной кривой блеска вместе с периодограммами, оценками спектральной плотности мощности и функцией плотности вероятности приведены на рис. 6.

#### 4.3.3. Оценка статистической значимости взаимной корреляции на примере блазара ЗС 454.3

Статистическую значимость функции взаимной корреляции для различных значений временных лагов можно оценить по методике Монте-Карло, предварительно получив большое количество модельных кривых блеска по алгоритму из работы Emanoulopoulos et al. (2013), описанному выше. В этой же работе (с. 919) проиллюстрировано, как такие модели можно использовать для оценки доверительных интервалов кросс-корреляционной функции (DCF) для двух кривых блеска.

<sup>3</sup><https://github.com/samconnolly/DELightcurveSimulation>



**Рис. 6.** Пример моделирования кривой блеска для близзара 3С 454.3 на частоте 22 ГГц (данные РАТАН-600): (а) исходная кривая блеска; (б) вариант модельной кривой блеска; (с) периодограмма и модель спектральной плотности мощности (СПМ) исходной кривой блеска; (д) периодограмма и СПМ модельной кривой блеска; (е) распределение значений и аппроксимирующая функция плотности вероятности (ФПВ) для исходной кривой блеска; (ф) распределение значений и ФПВ для модельной кривой блеска.

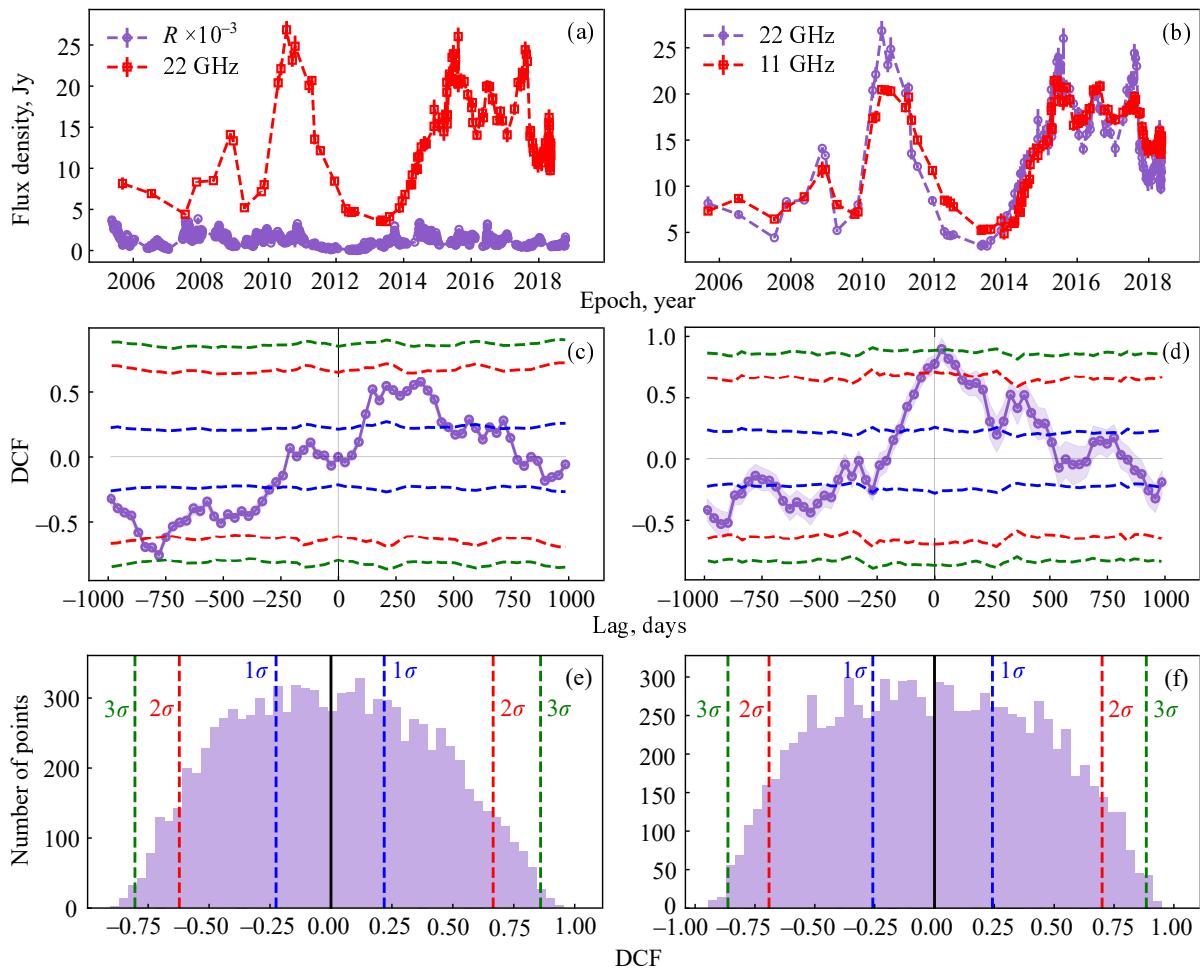
Спорным моментом в этом подходе является тот факт, что алгоритм моделирования кривых блеска по умолчанию применяется для равномерных (эквидистантных) временных рядов, а реальные данные обычно неравномерные. Можно обойти эту проблему, моделируя интерполированные эквидистантные кривые блеска, но вычисление кросс-корреляционной функции между парами кривых блеска необходимо выполнять, используя только те даты, когда проводились наблюдения и которые есть в исходных данных. В этом случае для вычисления кросс-корреляционной функции нужно использовать методику для неэквидистантных временных рядов, описанную в разделе 4.1.

На рис. 6 приведены примеры оценки доверительных интервалов для DCF между кривыми блеска близзара 3С 454.3. На панелях (а), (с), (е) показаны графики для пары кривых в оптическом диапазоне и в радиодиапазоне на частоте 22 ГГц, на панелях (б), (д), (ф) — для кривых блеска в радиодиапазоне на частотах 22 и 11 ГГц. Для оценки ста-

тистической значимости моделировалось по 10 000 кривых блеска в каждом из этих диапазонов. Для каждого временного лага от  $-1000$  до  $1000$  дней с шагом  $\Delta\tau = 30$  дней строилось распределение значений кросс-корреляционной функции, соответствующее случайным реализациям кривых блеска, и определялись уровни в  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  и  $3\sigma$ . На панелях (а) и (б) рис. 6 приведены пары кривых блеска, по которым вычислялась дискретная кросс-корреляционная функция (DCF). На панелях (с) и (д) показана сама DCF и обозначены доверительные интервалы в  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  и  $3\sigma$  для всего диапазона лагов. На панелях (е) и (ф) проиллюстрировано распределение модельных значений DCF для нулевого лага ( $\tau = 0$ ), а также обозначены доверительные интервалы.

#### 4.3.4. Практические аспекты использования модуля *DELightcurveSimulation*

Моделирование кривых блеска предполагает создание большого количества рядов со статисти-



**Рис. 7.** Пример оценки статистической значимости кросс-корреляционной функции для блазара 3C 454.3 между кривыми блеска в оптическом диапазоне и радиодиапазоне на частотах 22 и 11 ГГц (РАТАН-600): (а) исходные кривые блеска в оптическом диапазоне и 22 ГГц; (б) исходные кривые блеска в диапазонах 22 ГГц и 11 ГГц; (с) кросс-корреляционная функция с шагом  $\Delta\tau = 30$  дней для пары  $R_{\text{mag}} - 22$  ГГц; (д) кросс-корреляционная функция с шагом  $\Delta\tau = 30$  дней для пары 22 ГГц—11 ГГц; (е) гистограмма 10 000 модельных значений кросс-корреляционной функции для нулевого лага для пары  $R_{\text{mag}} - 22$  ГГц; (ф) гистограмма 10 000 модельных значений кросс-корреляционной функции для нулевого лага для пары 22 ГГц—11 ГГц. Пунктиром отмечены уровни  $\pm 1\sigma$ ,  $\pm 2\sigma$  и  $\pm 3\sigma$ .

ческими свойствами, идентичными наблюдаемой кривой блеска объекта. Для этого производится оценка функции плотности вероятности и спектральной плотности мощности исходной кривой блеска, обычно интерполированной через равные промежутки времени. Далее в эти оценки вписываются модельные функции, двухкомпонентная функция для ФПВ (уравнение (26)) и степенная функция, описывающая Пуассоновский процесс для СПМ (уравнение (25)). Устойчивость аппроксимации модельными функциями сильно зависит от качества исходной кривой блеска и начальных параметров по умолчанию, и нередко встречается ситуация, когда решение расходится и функция аппроксимации (в данном случае `scipy.optimize.minimize`) не возвращает параметры модельной функции. Список рекомендаций

для процедуры моделирования кривых блеска следующий.

- Контролировать визуально результат аппроксимации ФПВ и СПМ модельными функциями;
- При сбое аппроксимации ФПВ модельной функцией изменить начальные параметры модуля оптимизации `scipy.optimize.minimize`;
- Иногда ситуацию исправляет пред-оптимизация параметров на основе Марковских цепей (например, `emcee`<sup>4</sup>), но такая возможность отсутствует в модуле `DELightcurveSimulation`, и соответствующую функцию нужно написать самому пользователю;
- При сбое аппроксимации СПМ, проявляющейся в виде плоского спектра белого шума, по-

<sup>4</sup><https://github.com/dfm/emcee>

могает простой перезапуск процедуры, после которой нужно визуально контролировать полученный модельный спектр. Модельные кривые блеска с плоским спектром будут иметь избыток мощности на мелких масштабах, что приведет к последующим ошибкам в оценках статзначимости кросс-корреляционной функции DCF.

#### 4.4. Проблемы при интерпретации кросс-корреляционной функции

При вычислении DCF по методике, описанной в разделе 4.1, необходимо принимать во внимание качество исходного наблюдательного материала и согласовывать его с параметрами вычисления кросс-корреляционной функции. В частности, попытка расчета DCF для ширины временного лага меньше, чем скважность наблюдений в какой-либо из кривых блеска, приводит к ошибочной оценке магнитуды коэффициента взаимной корреляции, которая становится больше единицы. С другой стороны, при наличии на кривой блеска точек с большими ошибками подкоренное выражение в знаменателе уравнения (22) может стать отрицательным и такая точка DCF исключается из массива выходных значений DCF. В случае малого размера лага, больших ошибок измерений и малой переменности самой кривой блеска модуль `pydcf` вместо значений DCF возвращает массив NaN.

Если при расчете DCF и интерпретации его результатов возникают такого рода проблемы, можно рекомендовать следующее.

1. При появлении коэффициентов взаимной корреляции со значениями больше  $|1|$  рекомендуется проанализировать среднюю скважность наблюдений и установить величину временного лага  $\Delta\tau$  больше, чем средняя скважность обеих кривых блеска.
2. При отсутствии точек в выходном массиве DCF нужно проверить соответствие ошибок наблюдений  $e_f$  и стандартного отклонения в интервале лагов  $\sigma_f$  (уравнение (22)). Если разброс точек на кривой блеска меньше, чем ошибки наблюдения, то взаимная корреляция вычисляться не будет, и можно считать эти два временных ряда некоррелированными.

Также можно отметить, что модуль `pydcf` рассчитывает ошибки только для величины функции взаимной корреляции (ордината), а ошибки положения точек по оси абсцисс (ось временных лагов) можно условно принять за половину интервала лагов  $\Delta\tau/2$ , для которого считается DCF.

#### 5. ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ

Переменность излучения АЯГ носит сложный, часто нестационарный характер. Во временных рядах таких объектов могут присутствовать как кратковременные всплески яркости, так и долгоживущие квазипериодические колебания, параметры которых (амплитуда, частота, фаза) могут изменяться во времени. Для анализа подобных сигналов необходимы методы, позволяющие одновременно локализовать информацию во времени и в частотной области.

Традиционный метод исследования частотного состава сигнала — это преобразование Фурье (Bracewell, 2000). Однако классическое преобразование Фурье разлагает сигнал в сумму бесконечных синусоидальных колебаний, которые имеют бесконечную длительность. В результате оно прекрасно показывает, какие частоты присутствуют в сигнале, но полностью теряет информацию о том, когда именно эти частоты возникают или исчезают. Для стационарных сигналов этого достаточно, но в случае переменных источников, таких как блазары, этого недостаточно.

Для частичного решения данной проблемы используется оконное преобразование Фурье (Windowed Fourier Transform, WFT), также известное как кратковременное преобразование Фурье (Short-Time Fourier Transform, STFT) (Cohen, 1995; Mallat, 1999). В этом методе анализ ведется на скользящем временном окне фиксированной длины, что позволяет определить, в какой момент времени появляются или исчезают те или иные частотные компоненты. Однако у WFT есть фундаментальное ограничение: компромисс между временным и частотным разрешением (Mallat, 1999). Узкое окно дает хорошее временное разрешение, но плохое частотное, а широкое окно — наоборот. Кроме того, размер окна у WFT фиксирован, что создает трудности при анализе сигналов с широким спектром временных масштабов, характерным для кривых блеска АЯГ.

Вейвлет-преобразование предлагает альтернативный подход. Его ключевая особенность заключается в использовании коротких, локализованных во времени функций — вейвлетов (wavelets). Масштабируя (сжимая или растягивая) и сдвигая эти функции во времени, можно анализировать сигнал на разных временных масштабах и выявлять изменение частотного состава во времени (Daubechies, 1992; Torrence and Compo, 1998). Иными словами, вейвлет-преобразование позволяет решить две задачи:

- выявление присутствующих в сигнале частотных компонент;
- локализацию во времени моментов возникновения и/или исчезновения этих компонент.

В классическом непрерывном вейвлет-преобразовании (Continuous Wavelet Transform, CWT) сигнал  $x(t)$  разлагается по базисным вейвлет-функциям:

$$W(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^* \left( \frac{t-b}{a} \right) dt, \quad (27)$$

где  $a$  — параметр масштаба,  $b$  — временной сдвиг, а  $\psi$  — материнский вейвлет (mother wavelet). Для дискретных временных рядов этот интеграл заменяется суммой:

$$W(n, s) = \sum_{n'=0}^{N-1} x_{n'} \psi^* \left( \frac{(n' - n)\Delta t}{s} \right), \quad (28)$$

где  $s$  — масштаб,  $\Delta t$  — шаг дискретизации. Для вычисления этого выражения временной ряд часто предварительно интерполируется на равномерную сетку.

Для анализа квазипериодических колебаний в астрономии часто используют комплексный вейвлет Морле (Morlet wavelet):

$$\psi_0(\eta) = \pi^{-1/4} e^{i\omega_0\eta} e^{-\eta^2/2}, \quad (29)$$

где  $\eta$  — безразмерное время, а  $\omega_0$  — центральная безразмерная частота волны (Foster, 1996; Torrence and Compo, 1998; Koronovsky and Khratov, 2003). Однако классическое CWT имеет серьезное ограничение: оно предполагает равномерную временную сетку данных. В реальных астрономических наблюдениях интервалы между измерениями часто неравномерны из-за сезонности, погоды или технических ограничений. Прямая интерполяция временного ряда может искажить временную структуру сигнала, что особенно критично для кривых блеска блазаров.

Существует также дискретное вейвлет-преобразование (Discrete Wavelet Transform, DWT), которое эффективно используется в задачах сжатия данных и обработки изображений (Mallat, 1999). Однако в анализе астрономических временных рядов DWT применяется редко, так как требует равномерной выборки данных и дает дискретное разложение, что не всегда удобно для поиска переменности на произвольных временных масштабах.

Для анализа астрономических данных особую сложность представляет неравномерная выборка временных рядов, возникающая из-за сезонных ограничений, погодных условий и технических факторов. Именно для работы с такими данными было предложено взвешенное вейвлет-преобразование (Weighted Wavelet Z-transform, WWZ, Foster, 1996).

## 5.1. Взвешенное вейвлет-преобразование

### 5.1.1. Основная идея WWZ

В отличие от CWT, WWZ не использует заранее выбранную материнскую вейвлет-функцию. Вместо этого он основывается на представлении сигнала в виде суммы синусоидальных колебаний в ограниченном временном окне. Такая модель хорошо подходит для выявления квазипериодических колебаний, амплитуда и частота которых могут изменяться во времени, — явление, часто наблюдаемое в кривых блеска АЯГ.

Ключевая особенность WWZ заключается в применении весовой функции, которая определяет, какие точки временного ряда вносят больший вклад в анализ для данного момента времени. В качестве весовой функции используется гауссово окно, которое позволяет локализовать анализируемый сигнал вблизи интересующего временного интервала. Таким образом, WWZ позволяет исследовать сигнал со скользящим окном и выявлять, какие частотные компоненты присутствуют в нем в различные моменты времени.

Главные отличия WWZ от классического CWT заключаются в следующем:

- WWZ специально рассчитан на работу с неравномерно дискретизированными данными, что делает его особенно ценным для астрономии, где регулярные наблюдения часто невозможны.
- В WWZ отсутствует выбор произвольной материнской вейвлет-функции. Анализ ведется с использованием фиксированной синусоидальной модели, что упрощает интерпретацию результатов.
- WWZ обеспечивает хорошую временную и частотную локализацию, позволяя строить двумерную карту зависимости мощности сигнала от времени и частоты без необходимости предварительной интерполяции данных.

Таким образом, WWZ объединяет преимущества локального временного анализа с возможностью работы с нерегулярными временными рядами. Это делает его одним из наиболее мощных инструментов для изучения переменности АЯГ и других нестационарных астрономических сигналов.

### 5.1.2. Математическая база WWZ

Метод WWZ основан на локальной аппроксимации временного ряда с использованием простой модельной функции в скользящем временном окне. Анализ выполняется на неравномерно дискретизированных данных без необходимости их интерполяции на равномерную сетку.

Временной ряд  $x(t)$  аппроксимируется функцией вида

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + C, \quad (30)$$

где  $\omega = 2\pi f$  — круговая частота исследуемого сигнала;  $A, B, C$  — параметры модели, определяемые методом наименьших квадратов. Эта модель позволяет выявить наличие периодического или квазипериодического сигнала в заданном временному интервале.

Чтобы локализовать анализ во времени, применяется частотно-зависимая весовая функция в виде гауссова окна:

$$w(t, \tau, \omega) = \exp [-c \omega^2 (t - \tau)^2], \quad (31)$$

где  $\tau$  — центр окна по времени;  $c$  — параметр ширины окна. Чем больше  $c$ , тем уже окно. Каждая точка временного ряда вносит вклад в вычисления пропорционально значению  $w(t, \tau, \omega)$ . Таким образом, анализ концентрируется вокруг момента времени  $\tau$ .

Параметры  $A, B, C$  вычисляются методом взвешенных наименьших квадратов. Для заданной частоты  $\omega$  и центра окна  $\tau$  необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} A S_{cc} + B S_{cs} + C S_c = S_{xc} \\ A S_{cs} + B S_{ss} + C S_s = S_{xs} \\ A S_c + B S_s + C S_1 = S_x, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} S_{cc} &= \sum w(t_i, \tau, \omega) \cos^2 \omega t_i, \\ S_{ss} &= \sum w(t_i, \tau, \omega) \sin^2 \omega t_i, \\ S_{cs} &= \sum w(t_i, \tau, \omega) \cos \omega t_i \sin \omega t_i, \\ S_c &= \sum w(t_i, \tau, \omega) \cos \omega t_i, \\ S_s &= \sum w(t_i, \tau, \omega) \sin \omega t_i, \\ S_1 &= \sum w(t_i, \tau, \omega), \\ S_{xc} &= \sum w(t_i, \tau, \omega) x(t_i) \cos \omega t_i, \\ S_{xs} &= \sum w(t_i, \tau, \omega) x(t_i) \sin \omega t_i, \\ S_x &= \sum w(t_i, \tau, \omega) x(t_i). \end{aligned}$$

Решение этой системы дает значения  $A, B, C$  для конкретных  $\omega$  и  $\tau$ .

Для оценки качества аппроксимации вычисляются следующие дисперсии.

• *Полная дисперсия исходных данных в окне:*

$$V_x = \frac{\sum w(t_i, \tau, \omega) [x(t_i) - \bar{x}]^2}{\sum w(t_i, \tau, \omega)}, \quad (32)$$

где  $\bar{x}$  — взвешенное среднее значения сигнала в окне:

$$\bar{x} = \frac{\sum w(t_i, \tau, \omega) x(t_i)}{\sum w(t_i, \tau, \omega)}.$$

- *Дисперсия, определяемая модельной функцией:*

$$V_y = \frac{\sum w(t_i, \tau, \omega) [y(t_i) - \bar{x}]^2}{\sum w(t_i, \tau, \omega)}, \quad (33)$$

где  $y(t_i)$  — значения аппроксимирующей модели (30) в моменты  $t_i$ .

Эффективное число точек внутри окна определяется как

$$N_{\text{eff}} = \frac{(\sum w(t_i, \tau, \omega))^2}{\sum w^2(t_i, \tau, \omega)}. \quad (34)$$

Эта величина учитывает разреженность данных. Если точки сгруппированы вблизи  $\tau$ ,  $N_{\text{eff}}$  может быть значительно меньше общего числа точек в ряде.

Итоговая  $Z$ -статистика вычисляется по формуле:

$$\text{WWZ}(f, \tau) = \frac{N_{\text{eff}} - 3}{2} \frac{V_y}{V_x - V_y}, \quad (35)$$

где числитель  $(N_{\text{eff}} - 3)/2$  связан с числом степеней свободы (три параметра модели), дробь  $V_y/(V_x - V_y)$  показывает, насколько хорошо модель описывает данные. Если модель хорошо описывает данные,  $V_y$  близко к  $V_x$  и WWZ становится большим, указывая на наличие квазипериодической компоненты в сигнале. Если сигнал не содержит периодической составляющей на данной частоте,  $V_y$  мало и WWZ близок к нулю.

Таким образом, метод WWZ позволяет построить двумерную карту зависимости мощности сигнала от времени и частоты без необходимости интерполяции временного ряда на равномерную сетку.

Ниже приведен пошаговый алгоритм, позволяющий рассчитать двумерную карту значений WWZ для заданного временного ряда.

• Шаг 1. Задание сеток частот и времени.

- Выбирают диапазон исследуемых частот  $f_{\min} - f_{\max}$  в зависимости от физики объекта. Например, для близкого к земле объекта интересны периоды от нескольких дней до нескольких сотен дней.
- Задают сетку частот. Рекомендуется использовать равномерную сетку или логарифмическую шкалу, если спектр переменности широк.
- Определяют сетку временных положений окон  $\tau$ . Обычно сетка выбирается с шагом около  $1/10 - 1/20$  предполагаемого периода сигнала, чтобы обеспечить хорошее покрытие времени.
- Шаг 2. Задание параметра окна  $\alpha$ .
- Выбирают параметр  $\alpha$ , который определяет ширину временного окна. Малое  $\alpha$  дает широкое окно (лучше разрешение по частоте, но хуже по времени). Большое  $\alpha$  дает узкое

- окно (хорошее временное разрешение, но хуже частотное).
- В астрономических задачах  $\alpha$  часто выбирается в диапазоне 0.01–0.1. Рекомендуется протестировать несколько значений, чтобы оценить устойчивость результата.
  - Шаг 3. Цикл по временным окнам.  
Для каждого положения окна  $\tau$ :
    - вычисляют веса  $w(t_i, \tau, \omega)$  для всех точек временного ряда по формуле (31), где  $c$  — параметр, задающий относительную ширину временного окна. Обычно  $c$  выбирается в диапазоне 0.005–0.0125 (см. Foster, 1996);
    - отбрасывают окна, в которых  $N_{\text{eff}}$  слишком мало (например, меньше пяти точек). Такие окна не дают достоверной оценки сигнала.
  - Шаг 4. Цикл по частотам.  
Для каждой частоты  $f$  из заданной сетки:
    - вычисляют  $\omega = 2\pi f$ ;
    - составляют матрицу нормальных уравнений для вычисления коэффициентов  $A, B, C$  методом наименьших квадратов (см. раздел 3.3);
    - решают систему для  $A, B, C$ .
    - вычисляют модельный ряд
- $$y(t_i) = A \cos \omega t_i + B \sin \omega t_i + C.$$
- Шаг 5. Вычисление дисперсий.
    - Вычисляют полную дисперсию данных в окне по формуле (32).
    - Вычисляют дисперсию, определяемую моделью  $V_y$  по формуле (33).
    - Вычисляют эффективное число точек по формуле (34).
  - Шаг 6. Вычисление WWZ-статистики.
    - Для текущих  $\tau$  и  $f$  вычисляют  $\text{WWZ}(f, \tau)$  по формуле (35).
    - Если  $V_x = V_y$ , то  $\text{WWZ} \rightarrow \infty$ , однако на практике это редкость. При вычислениях следует проверять знаменатель  $(V_x - V_y)$  на близость к нулю, чтобы избежать деления на ноль.
  - Шаг 7. Построение карты WWZ.
    - Повторяют шаги 3–6 для всех комбинаций  $\tau$  и  $f$ .
    - Заполняют двумерный массив значениями  $\text{WWZ}(f, \tau)$ .
    - Строят график карты мощности: ось абсцисс — время  $\tau$ , ось ординат — частота  $f$ , цветовая шкала — величина WWZ.
  - Шаг 8. Интерпретация результатов.
    - Высокие значения WWZ указывают на наличие квазипериодической компоненты на данной частоте в данном временном интервале.
    - Если WWZ низок на всех масштабах, в данных нет значимых периодических сигналов.

- Для уверенной интерпретации результатов требуется проверка статистической значимости пиков WWZ.

Описанный выше алгоритм метода WWZ реализован в открытом `Python`-пакете, разработанном Sebastian Kiehlmann (Kiehlmann et al., 2023) на основе оригинальной работы (Foster, 1996). Исходный код доступен онлайн<sup>5</sup>. Эта библиотека автоматизирует все ключевые этапы вычислений WWZ, включая построение сеток частот и временных окон, вычисление весов, решение системы нормальных уравнений для определения параметров модельной функции, а также расчет WWZ-статистики. В ней также предусмотрены инструменты для оценки статистической значимости результатов с помощью метода Монте-Карло.

Следует отметить, что реализация предполагает синусоидальную модель сигнала внутри временного окна и может быть менее эффективной при анализе одиночных всплесков или нерегулярных импульсов. Кроме того, при малом числе точек в окне результаты могут быть нестабильными. Обычно рекомендуется использовать окна, содержащие не менее 5–10 точек.

Таким образом, программа `wwz.py` является удобным инструментом для анализа переменности астрономических объектов и представляет собой практическое продолжение описанного выше алгоритма WWZ.

### 5.1.3. Преимущества и недостатки WWZ

Метод WWZ обладает рядом существенных преимуществ, которые делают его особенно ценным инструментом для анализа переменности.

- *Работа с неравномерными данными.* WWZ изначально разработан для работы с временными рядами, где интервалы между измерениями могут быть неравномерными. Это особенно важно в астрономических наблюдениях, когда регулярная дискретизация данных зачастую невозможна.
- *Локализация во времени и частоте.* Метод позволяет определить не только наличие периодического сигнала, но и проследить, в какой именно момент времени он появляется или исчезает.
- *Отсутствие необходимости интерполяции.* В отличие от классического CWT, WWZ не требует приведения данных к равномерной сетке, что позволяет избежать искажений временного ряда.

<sup>5</sup><https://github.com/skiehl/wwz>

- *Удобство визуализации.* WWZ формирует двумерную карту зависимости мощности сигнала от времени и частоты, что облегчает поиск квазипериодических колебаний или временных структур.
- *Инструменты статистической оценки.* Метод позволяет оценивать статистическую значимость обнаруженных сигналов с помощью анализа Монте-Карло.

Перечислим недостатки.

- *Синусоидальная модель.* WWZ предполагает, что исследуемый сигнал можно описать синусоидальной функцией. Для одиночных всплесков или сильно асимметричных импульсов этот подход может быть недостаточно точным.
- *Зависимость от параметра окна.* Разрешение по времени и частоте напрямую зависит от выбранного параметра  $\alpha$ , который приходится подбирать индивидуально для каждого временного ряда.
- *Снижение точности при малом числе точек.* Если в анализируемом временном окне слишком мало измерений (обычно меньше, чем 5–10 точек), результаты могут быть нестабильными или статистически ненадежными.
- *Высокие вычислительные затраты.* Для длинных временных рядов и высокоразрешающих сеток по времени и частоте метод может требовать значительных вычислительных ресурсов.

#### 5.1.4. Статистическая значимость

Результаты анализа методом WWZ в виде карты мощности  $WWZ(f, \tau)$  позволяют визуально выделить области, где сигнал обладает квазипериодической компонентой. Однако наличие пиков на карте еще не гарантирует, что выявленные колебания являются физически значимыми. Временные ряды часто содержат шумы, тренды или внезапные всплески яркости (вспышки), могут возникать ложные структуры в спектре мощности просто вследствие статистических флуктуаций. Чтобы избежать ложных интерпретаций, необходимо оценить, насколько велика вероятность появления наблюдаемых пиков при отсутствии реального сигнала.

Основной метод проверки статистической значимости в WWZ-анализе — это симуляции Монте-Карло. Принцип заключается в следующем:

- создаются искусственные временные ряды, которые воспроизводят статистические свойства исходного ряда;
- для каждого искусственного ряда вычисляется карта WWZ;
- строится распределение значений  $WWZ(f, \tau)$ , которое может возникнуть случайно;

- для каждого наблюдаемого пика в исходной карте вычисляется вероятность  $p$  получить такой или больший пик в случайном ряде ( $p$ -value).

Чем ниже  $p$ , тем выше статистическая значимость пика. Если  $p < 0.01$ , пик считается сильно значимым.

Классические методы генерации искусственных временных рядов (например, Timmer and König, 1995) моделируют только PSD исходного временного ряда. Однако в реальных астрономических данных часто встречаются вспышки, асимметрия распределения потока и другие нелинейные эффекты, не описываемые гауссовыми процессами. Для более точной оценки статистической значимости рекомендуется использовать алгоритм (Emmepoulopoulos et al., 2013), который позволяет генерировать искусственные временные ряды, воспроизводящие одновременно PSD и PDF. Алгоритм подробно рассмотрен в разделе 4.3.1. Использование искусственных временных рядов, воспроизводящих как PSD, так и PDF, позволяет избежать ложной статистической значимости, особенно в данных, где преобладают одиночные всплески или асимметричные распределения.

#### 5.2. Пример интерпретации карты WWZ

На рис. 8а, б представлены карты WWZ для источника АО 0235+164 в оптическом диапазоне и на частоте 5 ГГц соответственно. Кривые их блеска можно найти на рис. 2г и рис. 3а.

Как читать карту WWZ?

- По оси абсцисс ( $x$ ) отложено время в годах. Каждая точка на оси времени соответствует определенной эпохе наблюдений.
- По оси ординат ( $y$ ) отложен период (в годах). Чем выше точка на карте, тем большему временному масштабу (длительности колебаний) она соответствует.
- Цветовой градиент отражает мощность WWZ-статистики в данной точке карты. Более яркие цвета (переходящие к желтому или белому) указывают на наличие значимого сигнала данной периодичности в конкретный момент времени.
- Белые пунктирные контуры показывают области, где мощность превышает статистически значимый уровень (например, 95%), определенный с помощью моделирования методом Монте-Карло.
- Справа от карты расположен глобальный спектр мощности — зависимость средней мощности WWZ от периода. Пики на этом графике указывают на периоды, которые наиболее выражены в среднем по всему временному ряду.

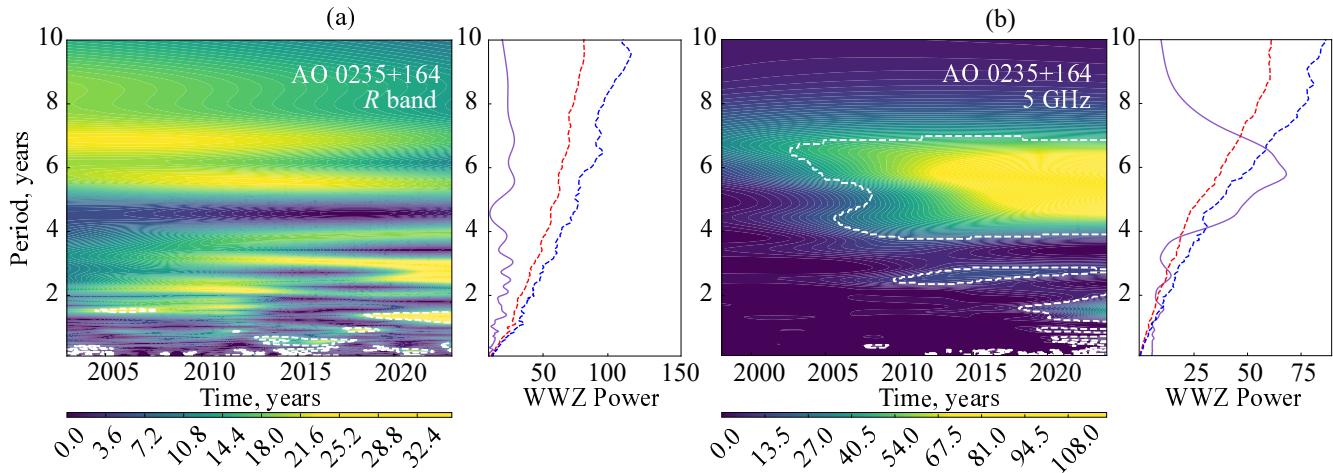


Рис. 8. Карты WWZ для источника AO 0235+164: панель (а) — в оптическом диапазоне за период 2002–2023 гг. (кривая блеска показана на рис. 2г); панель (б) — на частоте 5 ГГц за период 1997–2024 гг. (кривая блеска — на рис. 3а).

Анализ карты WWZ на рис. 8а показывает богатую временную структуру переменности нетеплового излучения источника. Наибольшие области повышенной мощности сосредоточены в диапазоне периодов примерно 1.5–2.5 года. Особенно интенсивная зона мощности наблюдается в интервале между 2005 и 2010 гг., что совпадает с серией крупных вспышек, зафиксированных в этот период. В частности, в конце 2008 г. в кривой блеска наблюдался яркий всплеск, когда поток возрос примерно до 2.6 Ян, что значительно выше среднего уровня в предыдущие годы (в 2005–2007 гг. плотность потока чаще находилась в диапазоне 0.3–1.6 Ян). Эта яркая вспышка и ее быстрое развитие создают сильный локальный пик мощности в области периодов около двух лет на карте WWZ.

Следует отметить, что карта WWZ показывает не только реальные квазипериодические компоненты, но и артефакты, связанные с пропусками данных. Наблюдения AO 0235+164 велись крайне неравномерно: в отдельные годы имеются десятки измерений за сезон, а в другие годы — лишь несколько точек или многомесячные пробелы. Такие разрывы в данных могут приводить к горизонтальным «полосам» усиленной мощности или к ложным сигналам на периодах, близких к длине сезонных окон наблюдений. Например, часть локальных пиков мощности в области периодов 1–1.5 года, наблюдавшихся после 2010 г., может быть связана именно с неравномерностью временного покрытия, а не с настоящей периодичностью объекта. Таким образом, при интерпретации карты WWZ необходимо учитывать как реальную активность источника, так и возможные артефакты, вызванные неполным и неравномерным покрытием временной оси данными.

Для сравнения на рис. 8б приведена карта того же источника на частоте 5 ГГц, где наблюдается

устойчивый максимум на значении 5.8 лет. Эта структура хорошо различима на протяжении более десяти лет, с начала 2000-х годов и вплоть до 2024 г. Такой протяженный, относительно узкий по оси времени гребень мощности является характерным признаком квазипериодической активности. Он подтверждается также на глобальном спектре (справа на рисунке), где пик при  $P \approx 5.8$  лет значительно превосходит уровень красного шума. Сопоставление с кривой блеска показывает, что мощные вспышки, которые наблюдались в 2008–2009, 2015–2016 и 2020–2021 гг., происходят приблизительно с интервалом, определенным по карте WWZ. Наличие такой согласованности между картой WWZ и кривой блеска усиливает доверие к обнаруженному периоду и делает его важным кандидатом на физически обусловленную переменность, например, за счет внутренних процессов в джете или орбитального движения в двойной системе. Также заметны менее выраженные участки мощности в диапазонах  $P \approx 2$ – $3$  года и  $P < 1.5$  года, однако они не являются устойчивыми во времени, а мощность в пределах этих участков ниже уровня значимости.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Временной анализ многочастотных кривых блеска АЯГ остается одним из ключевых инструментов в изучении физики экстремальных процессов, протекающих в окрестностях сверхмассивных черных дыр и в релятивистских джетах. Методы, рассмотренные в данной работе, — СФ, периодограмма ЛС, АКФ, ВКФ, метод дискретной корреляционной функции ДКФ, а также вейвлет-анализ — позволяют исследовать различные аспекты переменности излучения АЯГ. Каждый из этих методов обладает своими преимуществами и

ограничениями, что определяет целесообразность их применения в конкретных задачах анализа.

СФ дает возможность оценить характерные временные масштабы процессов и выявить особенности турбулентного или стохастического характера переменности. Периодограмма ЛС эффективна для поиска квазипериодических сигналов в неравномерных рядах наблюдательных данных, скрытых в сложном шумовом фоне. Корреляционные методы, в особенности ДКФ, являются незаменимыми инструментами для определения временных задержек между излучением в разных диапазонах, что критично для построения физически обоснованных моделей зон генерации излучения. Вейвлет-анализ дает возможность не только локализовать переменные процессы во времени, но и выявлять изменения частотного состава сигналов, что важно для сложных и эволюционирующих источников.

Опыт применения указанных методов показывает, что их совместное использование значительно повышает достоверность выводов и позволяет глубже понять природу многочастотной переменности излучения АЯГ. При этом необходимо учитывать ограничения каждого подхода, связанные с нестационарностью сигналов, влиянием шумов, неравномерностью данных и эффектами выборки. В современных исследованиях важную роль играют методы статистической проверки значимости результатов, включая моделирование Монте-Карло и учет красного шума, что особенно актуально для анализа квазипериодических осцилляций и поиска задержек излучения между диапазонами длин волн.

Таким образом, комплексное применение методов анализа временных рядов является одним из наиболее эффективных инструментов для изучения физики АЯГ и уточнения механизмов, формирующих их переменное излучение.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарны рецензенту за полезные предложения и замечания, которые способствовали улучшению работы.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания. Наблюдения на телескопах САО РАН выполняются при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. Обновление приборной базы осуществляется в рамках национального проекта «Наука и университеты».

## КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## ДОСТУПНОСТЬ ДАННЫХ

Архивные радиоданные представлены в базе данных CATS на сайте <https://www.sao.ru/cats/>. Многочастотные измерения блазаров на РАТАН-600 доступны в онлайн каталоге BLcat на сайте <https://www.sao.ru/blcat/>.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. Alloin, C. Boisson, and D. Pelat, *Astron. and Astrophys.* **200**, 17 (1988).
2. G. Bhatta, S. Zola, M. Drozdz, et al., *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **520** (2), 2633 (2023). DOI:10.1093/mnras/stad280
3. R. Blandford, D. Meier, and A. Readhead, *Annual Rev. Astron. Astrophys.* **57**, 467 (2019). DOI:10.1146/annurev-astro-081817-051948
4. R. N. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications*, 3rd ed. (McGraw-Hill, Boston, 2000).
5. J. N. Bregman, A. E. Glassgold, P. J. Huggins, et al., *Astrophys. J.* **331**, 746 (1988). DOI:10.1086/166596
6. S. Britzen, C. Fendt, G. Witzel, et al., *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **478** (3), 3199 (2018). DOI:10.1093/mnras/sty1026
7. S. Britzen, M. Zajáček, Gopal-Krishna, et al., *Astrophys. J.* **951** (2), id. 106 (2023). DOI:10.3847/1538-4357/accbbc
8. S. K. Chakrabarti and S. G. Manickam, *Astrophys. J.* **531** (1), L41 (2000). DOI:10.1086/312512
9. L. Cohen, *Time-Frequency Analysis* (Prentice Hall PTR, New Jersey, 1995).
10. I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets* (Publishing House of the Institute of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1992).
11. D. J. D’Orazio, Z. Haiman, and D. Schiminovich, *Nature* **525** (7569), 351 (2015). DOI:10.1038/nature15262
12. R. A. Edelson and J. H. Krolik, *Astrophys. J.* **333**, 646 (1988). DOI:10.1086/166773
13. D. Emmanoulopoulos, I. M. McHardy, and I. E. Papadakis, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **433** (2), 907 (2013). DOI:10.1093/mnras/stt764
14. G. Foster, *Astron. J.* **112**, 1709 (1996). DOI:10.1086/118137
15. C. M. Gaskell and B. M. Peterson, *Astrophys. J. Suppl.* **65**, 1 (1987). DOI:10.1086/191216
16. C. M. Gaskell and L. S. Sparke, *Astrophys. J.* **305**, 175 (1986). DOI:10.1086/164238
17. G. Ghisellini, A. Celotti, G. Fossati, et al., *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **301** (2), 451 (1998). DOI:10.1046/j.1365-8711.1998.02032.x

18. A. Goyal, M. Soida, L. Stawarz, et al., *Astrophys. J.* **927** (2), id. 214 (2022). DOI:10.3847/1538-4357/ac4d95
19. P. A. Hughes, H. D. Aller, and M. F. Aller, *Astrophys. J.* **396**, 469 (1992). DOI:10.1086/171734
20. S. G. Jorstad, A. P. Marscher, V. M. Larionov, et al., *Astrophys. J.* **715** (1), 362 (2010). DOI:10.1088/0004-637X/715/1/362
21. J. Kataoka, T. Takahashi, S. J. Wagner, et al., *Astrophys. J.* **560** (2), 659 (2001). DOI:10.1086/322442
22. S. Kiehlmann, W. Max-Moerbeck, and O. King, *Astrophysics Source Code Library*, record ascl:2310.003 (2023).
23. A. N. Kolmogorov, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **30**, 229 (1941).
24. Yu. Yu. Koronovsky and Yu. Yu. Khramov, *Continuous Wavelet Analysis and Its Applications* (Fizmatlit, Moscow, 2003). [in Russian]
25. A. Krishna Mohana, A. C. Gupta, A. P. Marscher, et al., *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **527** (3), 6970 (2024). DOI:10.1093/mnras/stad3583
26. N. R. Lomb, *Astrophys. and Space Sci.* **39** (2), 447 (1976). DOI:10.1007/BF00648343
27. S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, 2nd ed. (Academic Press, San Diego, 1999).
28. J. J. Moré, “*The Levenberg-Marquardt Algorithm: Implementation and Theory*” in *Numerical Analysis. Lecture Notes in Mathematics*, Ed. by G. A. Watson **630**, 105–116 (Springer, Berlin, 1978).
29. S. Paltani, T. J. L. Courvoisier, and R. Walter, *Astron. and Astrophys.* **340**, 47 (1998). DOI:10.48550/arXiv.astro-ph/9809113
30. W. H. Press and G. B. Rybicki, *Astrophys. J.* **338**, 277 (1989). DOI:10.1086/167197
31. G. E. Romero, L. Chajet, Z. Abraham, and J. H. Fan, *Astron. and Astrophys.* **360**, 57 (2000).
32. J. D. Scargle, *Astrophys. J.* **263**, 835 (1982). DOI:10.1086/160554
33. T. Schreiber and A. Schmitz, *Phys. Rev. Lett.* **77** (4), 635 (1996). DOI:10.1103/PhysRevLett.77.635
34. M. Schulz and M. Mudelsee, *Computers and Geosciences* **28** (3), 421 (2002). DOI:10.1016/S0098-3004(01)00044-9
35. A. Schuster, *Nature* **58** (1494), 151 (1898). DOI:10.1038/058151a0
36. J. H. Simonetti, J. M. Cordes, and D. S. Heeschen, *Astrophys. J.* **296**, 46 (1985). DOI:10.1086/163418
37. M. Steffen, *Astron. and Astrophys.* **239**, 443 (1990).
38. J. Timmer and M. König, *Astron. and Astrophys.* **300**, 707 (1995).
39. C. Torrence and G. P. Compo, *Bulletin of the American Meteorological Society* **79** (1), 61 (1998). DOI:10.1175/1520-0477(1998)079<0061:APGTWA>2.0.CO;2
40. M. J. Valtonen, A. Gopakumar, S. Mikkola, et al., *arXiv e-prints* astro/ph:1208.4524 (2012). DOI:10.48550/arXiv.1208.4524
41. J. T. VanderPlas, *Astrophys. J. Suppl.* **236** (1), article id. 16 (2018). DOI:10.3847/1538-4365/aab766
42. V. V. Vlasuk, Y. V. Sotnikova, A. E. Volvach, et al., *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **535** (3), 2775 (2024). DOI:10.1093/mnras/stae2491
43. M. Zechmeister and M. Kürster, *Astron. and Astrophys.* **496** (2), 577 (2009). DOI:10.1051/0004-6361:200811296

## Methods for Analyzing Multiwavelength Light Curves of AGNs

**M. L. Khabibullina<sup>1</sup>, V. A. Stolyarov<sup>1,2</sup>, P. G. Zhekanis<sup>1</sup>, T. V. Mufakharov<sup>1</sup>, Yu. V. Sotnikova<sup>1</sup>, A. E. Volvach<sup>3</sup>, G. A. Borman<sup>3</sup>, T. S. Grishina<sup>4</sup>, E. G. Larionova<sup>4</sup>, D. A. Morozova<sup>4</sup>, S. S. Savchenko<sup>4,5</sup>, I. S. Troitskiy<sup>4</sup>, Yu. V. Troitskaya<sup>4</sup>, and A. A. Vasilyev<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>Special Astrophysical Observatory of the Russian Academy of Sciences, Nizhnii Arkhyz 369167, Russia

<sup>2</sup>Astrophysics Group, Cavendish Laboratory, University of Cambridge, Cambridge, CB3 0HE UK

<sup>3</sup>Crimean Astrophysical Observatory, Russian Academy of Sciences, Nauchny, 298409 Russia

<sup>4</sup>St. Petersburg University, St. Petersburg, 199034 Russia

<sup>5</sup>Central (Pulkovo) Astronomical Observatory, Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, 196140 Russia

The paper presents methods for analyzing multiwavelength light curves of active galactic nuclei with uneven time sampling, including the use of the structure functions, autocorrelation and cross-correlation functions, Lomb–Scargle periodograms, and weighted wavelet analysis. The structure functions allow quantitative estimation of the temporal scales of variations, correlation functions provide detection of temporal delays between different frequencies, Lomb–Scargle periodograms detect periodicities in nonuniform data, and wavelet analysis makes it possible to localize variable processes in time and to study the evolution of the signal frequency composition. The comprehensive use of these methods allows detailed investigation of the temporal and frequency structure of physical processes in active galactic nuclei taking into account the influence of the unevenness of experimental data. The advantages and limitations of each method are considered using examples of analyzing specific sources, and their practical significance for studying the variability of active galactic nuclei is demonstrated.

**Keywords:** *methods: data analysis—methods: statistical—galaxies: active—galaxies: jets—quasars: general*