АСТРОФИЗИЧЕСКИЙ БЮЛЛЕТЕНЬ, 2025, том 80, № 4, с. 727–732

УДК 520.88:52-64

КОМПАКТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ H-ФУНКЦИИ ЧАНДРАСЕКАРА

© 2025 Х. Озтюрк[1*], Ф. Анли[2**], А. Кадем[3***]

[1]Университет Османие Коркут Ата, Османие, 80000 Турция

[2]Университет Кахраманмараш Сютчу Имам, Кахраманмараш, 46040 Турция

[3]Университет Фархата Аббаса, Сетиф, 19137 Алжир

Поступила в редакцию 1 октября 2024 года; после доработки 5 июня 2025 года; принята к публикации 15 сентября 2025 года

H-функция Чандрасекара играет важную роль в теоретической астрофизике, в частности в теории рассеяния при радиативном переносе. В данной статье получено численное решение нелинейного интегрального уравнения для H-функции Чандрасекара и ее первой производной. Также получены численные результаты для нулевого, первого и второго моментов H-функции. Составлена компактная формулировка для набора квадратур Лежандра со сдвигом по Гауссу, которая затем использована для численных расчетов. Из вывода уравнений и подробного объяснения применения численного метода видно, что предлагаемый метод может быть применен и к другим прикладным задачам. Численные результаты, согласующиеся с имеющимися в литературе, получены даже в приближениях низкого порядка. Согласие между ними соответствует разнице примерно в 0.01%. Это наглядно иллюстрирует точность и возможности метода.

Ключевые слова: *H-функция Чандрасекара — радиативный перенос — квадратура Гаусса–Лежандра*

1. ВВЕДЕНИЕ

Ортогональные многочлены широко используются во всех областях науки и техники, поскольку они очень тесно связаны с задачами, содержащими тригонометрические, гипергеометрические, эллиптические и другие функции. Кроме того, они используются в задачах интерполяции и механической квадратуры, особенно при решении линейных и нелинейных дифференциальных и интегральных уравнений. H-функция Чандрасекара используется для решения задачи одномерного переноса излучения в поглощающей и рассеивающей среде. Задача содержит как линейные, так и нелинейные уравнения и определяется интегральным уравнением, установленным Амбарцумяном и Чандрасекаром (Ambarzumian, 1929; Chandrasekhar, 1960). Множество авторов внесли свой вклад в создание впечатляющего массива знаний о свойствах H-функций, поэтому эти функции имеют большое значение в теории переноса излучения в атмосферах планет и звезд. Кроме того, они очень важны с точки зрения их практического применения для лучшего понимания процессов переноса излучения в тканях при оптической томографии в инфракрасной области, рассеивания лазерного луча в среде или мощности излучения промышленной печи. Проведено множество исследований, и особое внимание уделялось поиску методов, которые дают точные результаты в задачах переноса излучения в контексте детерминированных методов, основанных на H-функции Чандрасекара (Chandrasekhar and Breen, 1947; Siewert, 1975; Kelley, 1980; Vatsya, 1982; Bosma and de Rooij, 1983; Boyd, 1986, 2005; Pomran- ing, 1990; Kawabata et al., 1991; Kawabata and Satoh, 1992; Simovic, 1999; Nath Das and Bera, 2007; Natraj andHovenier, 2012; Ganapol et al., 2016; Waseem et al., 2016; Jablonski, 2019). Bosma and de Rooij (1983) предложили три итерационных метода для определения скалярных H-функций для неотрицательных характеристических решений. Немного изменив методику, использованную в этом исследовании, Natraj and Hovenier (2012) представили точные значения интенсивности и поляризации света, отраженного и прошедшего через оптически плотную атмосферу с рэлеевским рассеянием и ламбертовой поверхностью под ней. Использовалась замкнутая форма интегрального представления H-функции и квадратура Гаусса–Лежандра, приведены численные результаты для H-функции с 11 знаками. Кроме того, для вычис-

[*]E-mail: hakanozturk@osmaniye.edu.tr
[**]E-mail: anli@ksu.edu.tr
[***]E-mail: abdelouahabk@yahoo.fr

ления коэффициентов разложения в ряд Неймана H-функции Чандрасекара для изотропного рассеяния Kawabata et al. (1991) и Kawabata and Satoh (1992) представили два численных метода, включающих прямую оценку выражения в замкнутой форме для коэффициентов разложения и использование функций отражения для последовательных порядков рассеяния. В наших недавних исследованиях был разработан альтернативный метод решения нелинейного интегрального уравнения для H-функции Чандрасекара путем разложения функции $1/(\mu+\mu')$ в подынтегральном выражении на сдвинутые многочлены Лежандра. При применении этой процедуры нелинейное интегральное уравнение преобразуется в форму, подходящую для численного расчета (Anlı and Öztürk, 2021). Аналогичным образом, чтобы вывести полуаналитическое выражение для H-функции, было получено новое нелинейное интегральное уравнение в терминах G-функции, которая явно определена в терминах H-функции в работе Öztürk and Anlı (2023). Из краткого изложения упомянутых выше работ можно сделать вывод, что целесообразно проводить дальнейшие исследования, касающиеся решения нелинейного интегрального уравнения для H-функции Чандрасекара. В данной работе, в разделах 2 и 3, мы сначала выводим компактную формулировку для набора квадратур Лежандра со сдвигом по Гауссу, а затем дискретизируем нелинейное уравнение в терминах косинуса зенитного угла падающего или исходящего излучения μ. Наконец, полученное уравнение решается численно для H-функции и ее производной и момента с использованием набора квадратур Лежандра со сдвигом по Гауссу. Численные результаты, полученные для этих величин, а также данные, взятые из литературы, приведены в таблицах в разделе 4. Основываясь на впечатляющем соответствии, наблюдаемом между представленными значениями, мы полагаем, что наши результаты можно считать существенными.

2. H-ФУНКЦИЯ И АППРОКСИМАЦИЯ

Нелинейное интегральное уравнение для H-функции Чандрасекара с изотропным рассеянием и для неконсервативного случая дано Амбарцумяном (Ambarzumian, 1929) и Чандрасекаром (Chandrasekhar, 1960):

$$H(\mu,c)=1+\frac{\mu c}{2}H(\mu,c)\int_0^1 H(\mu',c)\,\frac{d\mu'}{\mu+\mu'},\quad 0\le(\mu,c)\le 1. \tag{1}$$

Уравнение (1) можно переписать как

$$\sqrt{1-c}\,H(\mu,c)=1-\frac{c}{2}H(\mu,c)\int_0^1 H(\mu',c)\,\frac{\mu' d\mu'}{\mu+\mu'},\quad 0\le(\mu,c)\le 1 \tag{2}$$

с помощью следующих преобразований:

$$\begin{aligned}\int_0^1 H(\mu,c)\,d\mu &= \frac{2}{c}\left(1-\sqrt{1-c}\right),\\ \frac{\mu}{\mu+\mu'}=1 &- \frac{\mu'}{\mu+\mu'},\end{aligned} \tag{3}$$

где c — альбедо одиночного рассеяния, а μ и μ' — косинусы зенитного угла падающего или исходящего и отраженного излучения соответственно. Среди многочленов Якоби многочлены Лежандра с их легко исполнимыми уравнениями широко используются практически во всех областях науки и техники. Они особенно предпочтительны в теории переноса излучения. Поэтому в данном исследовании мы используем сдвинутые многочлены Лежандра первого рода, для которых производящая функция последовательности и соотношения ортогональности даны Abramowitz and Stegun (1972) и Arfken (1985) соответственно:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2(2\mu-1)t+t^2}}=\sum_{i=0}^{\infty} t^n P_n(2\mu-1),\ |t|<1, \tag{4}$$

$$\int_0^1 P_n(2\mu-1)P_m(2\mu-1)\,d\mu = \frac{\delta_{n,m}}{2n+1}, \tag{5}$$

где $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера:

$$\delta_{n,m}=\begin{cases}0, n\neq m\\ 1, n=m.\end{cases} \tag{6}$$

Как хорошо известно из численного анализа, определенный интеграл любой функции $f(\mu)$ на интервале $[-1,1]$ может быть аппроксимирован набором квадратур Гаусса–Лежандра:

$$\int_{-1}^1 f(\mu)d\mu\approx\sum_{i=1}^{N} f(\mu_i)\,\omega_i, \tag{7}$$

где i — точки выборки, а μ_i — корни N-го многочлена Лежандра $P_N(\mu)$. Веса квадратур ω_i задаются формулой:

$$\omega_i=\frac{2}{(1-\mu_i^2)\left[P_N'(\mu_i)\right]^2}, i=1,...,N, \tag{8}$$

где $P_N'(\mu_i)$ — первые производные многочленов Лежандра. Однако интегралы в уравнениях (1) и (2) находятся в интервале $[0,1]$. Поэтому для их аппроксимации мы использовали альтернативный набор квадратур, определенный на интервале $[0,1]$. Затем мы составили набор квадратур Лежандра со сдвигом по Гауссу с компактной формулировкой в виде

$$P_N(2\mu_m-1)=0, \omega_m=\left[\sqrt{\mu_m-\mu_m^2}P_N'(2\mu_m-1)\right]^{-2},$$
$$m=1,...,N, \tag{9}$$

где N — порядок квадратуры Лежандра со сдвигом по Гауссу, μ_m — нули $P_N(2\mu-1)$, ω_m — весовые коэффициенты, а $P_N'(2\mu-1)$ — значения первых производных $P_N(2\mu-1)$ в μ_m (Abramowitz and Stegun, 1972). Отметим, что все значения μ_m и ω_m находятся в диапазоне $[0,1]$. Например, для $N=2$ они могут быть заданы как

$$\mu_1=\frac{3+\sqrt{3}}{6}, \mu_2=\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \omega_1=\omega_2=\frac{1}{2}. \tag{10}$$

После изложения необходимой информации мы готовы использовать набор квадратур для получения численного решения нелинейного уравнения для H-функции Чандрасекара. Применяя набор к уравнениям (1) и (2) для произвольного порядка N, получаем соответственно,

$$H(\mu,c)=1+\frac{\mu c}{2}H(\mu,c)\sum_{m=1}^{N}\frac{H_m(c)\,\omega_m}{\mu+\mu_m},$$
$$0\le(\mu,c)\le 1; \tag{11}$$

$$\sqrt{1-c}\,H(\mu,c)=1-\frac{c}{2}H(\mu,c)\sum_{m=1}^{N}\frac{\mu_m H_m(c)\,\omega_m}{\mu+\mu_m},$$
$$0\le(\mu,c)\le 1, \tag{12}$$

где мы использовали $H(\mu_m,c)=H_m(c)$. Когда мы применяем гауссову квадратуру индивидуально к уравнению (11) или уравнению (12), получаем одни и те же численные результаты. Таким образом, можно сказать, что не имеет значения, какое из этих уравнений используется.

3. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ

Мы предпочли использовать уравнение (11) для численного вычисления H-функции Чандрасекара. Уравнение (11) можно переписать в виде

$$H_n(c)=1+\frac{\mu_n c}{2}H_n(c)\sum_{m=1}^{N}\frac{H_m(c)\,\omega_m}{\mu_n+\mu_m},$$
$$0\le c\le 1, n=1,...N, \tag{13}$$

и $H_m(c)$ вычисляются для каждого значения c. Отметим, что уравнение (13) содержит N нелинейных алгебраических уравнений с N неизвестными ($H_m(c)$). Имея $H_m(c)$, вычисленные по уравнению (13), получаем выражение для вычисления H-функции для любых значений μ и c:

$$H(\mu,c)=\left(1-\frac{\mu c}{2}\sum_{m=1}^{N}\frac{H_m(c)\,\omega_m}{\mu+\mu_m}\right)^{-1},$$
$$0\le(\mu,c)\le 1. \tag{14}$$

Из уравнения (14) также может быть получена первая производная H-функции Чандрасекара:

$$H'(\mu,c) = \frac{\partial H(\mu,c)}{\partial\mu}=\frac{1}{\mu}\left(H^2(\mu,c)-H(\mu,c)\right) - \frac{\mu c}{2}H^2(\mu,c)\sum_{m=1}^{N}\frac{H_m(c)\omega_m}{(\mu+\mu_m)^2}. \tag{15}$$

В этом исследовании была вычислена еще одна физическая величина — момент H-функции:

$$\alpha_n(c)=\int_0^1\mu^n H(\mu,c)\,d\mu\cong\sum_{m=1}^{N}\mu_m^n\,H_m(c)\omega_m. \tag{16}$$

4. ВЫВОДЫ

В данной статье получены численные выражения для H-функции Чандрасекара, а также ее первая производная и момент в уравнениях (14), (15) и (16) соответственно. Мы вычислили H-функцию Чандрасекара и ее первую производную для различных значений μ и c, использовав квадратуру Лежандра порядка $N=10$ со сдвигом по Гауссу. На первый взгляд такой порядок аппроксимации кажется недостаточным. Тем не менее, применяя гауссову квадратуру низкого порядка, можно получить почти точные решения для многих логарифмических интегралов с помощью математического программного обеспечения, например Maple или MATLAB. Таким образом, данное приближение можно считать разумным. Все вычисления были выполнены с использованием программного обеспечения Maple. Мы также рассчитали несколько моментов H-функции. Представлены результаты численных расчетов: для H-функции в таблице 1, для первой производной H-функции в таблице 2 и для моментов H-функции в таблице 3. В таблицах мы приводим наши результаты в сравнении с результатами, взятыми из литературы. Столбцы «CHR» содержат расчеты Чандрасекара (Chandrasekhar, 1960), а «OURS» — наши результаты, полученные в настоящем исследовании. Из таблицы 1 видно, что, хотя наши результаты и значения, полученные Чандрасекаром, практически совпадают, в некоторых точках наблюдаются очень небольшие различия, которые могут быть вызваны различиями в используемых методах расчета. Средняя разница между нашими результатами и результатами Чандрасекара составляет около

Таблица 1. Численные результаты для H-функции

μ	$c = 0.1$		$c = 0.2$		$c = 0.3$		$c = 0.4$		$c = 0.5$	
	CHR	OURS	CHR	OURS	CHR	OURS	CHR	OURS	CHR	OURS
0.00	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.05	1.00783	1.00781	1.01608	1.01605	1.02484	1.02480	1.03422	1.03416	1.04439	1.04426
0.10	1.01238	1.01238	1.02562	1.02562	1.03989	1.03988	1.05535	1.05536	1.07241	1.07237
0.15	1.01584	1.01584	1.03295	1.03294	1.05155	1.05155	1.07196	1.07198	1.09474	1.09471
0.20	1.01864	1.01864	1.03892	1.03892	1.06115	1.06115	1.08577	1.08578	1.11349	1.11346
0.25	1.02099	1.02099	1.04396	1.04396	1.06930	1.06930	1.09758	1.09759	1.12968	1.12965
0.30	1.02300	1.02301	1.04829	1.04830	1.07637	1.07637	1.10789	1.10790	1.14391	1.14389
0.35	1.02475	1.02476	1.05209	1.05210	1.08259	1.08259	1.11700	1.11702	1.15659	1.15657
0.40	1.02630	1.02631	1.05546	1.05546	1.08811	1.08811	1.12516	1.12517	1.16800	1.16797
0.45	1.02768	1.02769	1.05847	1.05847	1.09308	1.09307	1.13251	1.13252	1.17833	1.17831
0.50	1.02892	1.02892	1.06117	1.06118	1.09756	1.09756	1.13918	1.13919	1.18776	1.18774
0.55	1.03004	1.03004	1.06363	1.06363	1.10164	1.10164	1.14528	1.14529	1.19640	1.19638
0.60	1.03106	1.03106	1.06587	1.06588	1.10538	1.10538	1.15087	1.15088	1.20436	1.20435
0.65	1.03199	1.03199	1.06793	1.06793	1.10881	1.10881	1.15602	1.15603	1.21173	1.21172
0.70	1.03284	1.03285	1.06982	1.06982	1.11198	1.11197	1.16080	1.16080	1.21858	1.21856
0.75	1.03363	1.03364	1.07157	1.07157	1.11491	1.11490	1.16523	1.16523	1.22495	1.22493
0.80	1.03436	1.03437	1.07319	1.07319	1.11763	1.11763	1.16935	1.16935	1.23091	1.23089
0.85	1.03504	1.03504	1.07469	1.07469	1.12017	1.12017	1.17320	1.17320	1.23648	1.23646
0.90	1.03567	1.03567	1.07610	1.07610	1.12254	1.12254	1.17681	1.17681	1.24171	1.24169
0.95	1.03626	1.03626	1.07741	1.07741	1.12476	1.12476	1.18019	1.18020	1.24664	1.24662
1.00	1.03682	1.03682	1.07864	1.07865	1.12685	1.12684	1.18337	1.18338	1.25128	1.25126

μ	$c = 0.6$		$c = 0.7$		$c = 0.8$		$c = 0.9$		$c = 1.0$	
	CHR	OURS	CHR	OURS	CHR	OURS	CHR	OURS	CHR	OURS
0.00	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.05	1.05544	1.05531	1.06780	1.06765	1.08200	1.08191	1.09990	1.09967	1.13680	1.13656
0.10	1.09137	1.09135	1.11306	1.11303	1.13880	1.13881	1.17220	1.17214	1.24740	1.24735
0.15	1.12045	1.12044	1.15036	1.15034	1.18660	1.18664	1.23490	1.23492	1.35080	1.35083
0.20	1.14517	1.14517	1.18253	1.18252	1.22860	1.22864	1.29140	1.29144	1.45030	1.45034
0.25	1.16674	1.16673	1.21095	1.21094	1.26630	1.26632	1.34330	1.34327	1.54730	1.54731
0.30	1.18587	1.18587	1.23643	1.23642	1.30060	1.30059	1.39140	1.39135	1.64250	1.64251
0.35	1.20304	1.20304	1.25951	1.25952	1.33200	1.33203	1.43640	1.43628	1.73640	1.73638
0.40	1.21861	1.21860	1.28063	1.28062	1.36110	1.36109	1.47850	1.47850	1.82930	1.82925
0.45	1.23280	1.23279	1.30003	1.30002	1.38810	1.38808	1.51830	1.51833	1.92130	1.92132
0.50	1.24581	1.24581	1.31796	1.31795	1.41320	1.41326	1.55600	1.55603	2.01280	2.01274
0.55	1.25781	1.25781	1.33459	1.33458	1.43680	1.43684	1.59180	1.59183	2.10370	2.10364
0.60	1.26893	1.26892	1.35009	1.35008	1.45900	1.45899	1.62590	1.62588	2.19410	2.19409
0.65	1.27925	1.27925	1.36457	1.36456	1.47980	1.47985	1.65830	1.65835	2.28420	2.28416
0.70	1.28888	1.28887	1.37815	1.37814	1.49950	1.49954	1.68930	1.68935	2.37400	2.37392
0.75	1.29788	1.29787	1.39090	1.39089	1.51820	1.51817	1.71900	1.71900	2.46350	2.46339
0.80	1.30631	1.30631	1.40291	1.40290	1.53580	1.53583	1.74740	1.74740	2.55270	2.55263
0.85	1.31424	1.31424	1.41425	1.41424	1.55260	1.55260	1.77460	1.77464	2.64170	2.64166
0.90	1.32171	1.32170	1.42497	1.42496	1.56850	1.56854	1.80080	1.80079	2.73060	2.73050
0.95	1.32875	1.32875	1.43512	1.43511	1.58370	1.58373	1.82590	1.82592	2.81930	2.81918
1.00	1.33541	1.33541	1.44476	1.44475	1.59820	1.59822	1.85010	1.85010	2.90780	2.90778

0.01%. В таблице 2 мы представляем численный расчет первых производных H-функции для избранных значений c. Для сравнения мы приводим результаты Nath Das and Bera (2007). В таблице 2, как и в таблице 1, наблюдаются некоторые различия между результатами для малых значений μ и больших значений c. Мы считаем, что это также связано с различиями в применяемых

Таблица 2. Численные результаты для производной H-функции

μ	$c=0.1$		$c=0.2$		$c=0.5$		$c=0.9$		$c=1.0$	
	Ref	OURS	Ref	OURS	Ref	OURS	Ref	OURS	Ref	OURS
0.00	$+\infty$	0.29650	$+\infty$	0.60086	$+\infty$	1.57610	$+\infty$	3.18831	$+\infty$	3.99452
0.05	0.10856	0.10865	0.22587	0.22606	0.64935	0.64983	1.59419	1.59507	2.33707	2.33802
0.10	0.07812	0.07812	0.16450	0.16451	0.49371	0.49373	1.33525	1.33527	2.12552	2.12549
0.15	0.06174	0.06174	0.13115	0.13115	0.40639	0.40639	1.18589	1.18589	2.02351	2.02344
0.20	0.05101	0.05101	0.10911	0.10911	0.34693	0.34693	1.07971	1.07970	1.96165	1.96158
0.25	0.04331	0.04331	0.09316	0.09316	0.30269	0.30269	0.99675	0.99675	1.91979	1.91972
0.30	0.03746	0.03746	0.08098	0.08098	0.26806	0.26806	0.92842	0.92841	1.88955	1.88947
0.35	0.03286	0.03286	0.07134	0.07134	0.24003	0.24003	0.87022	0.87021	1.86670	1.86662
0.40	0.02914	0.02914	0.06350	0.06350	0.21678	0.21678	0.81951	0.81951	1.84887	1.84878
0.45	0.02608	0.02608	0.05701	0.05701	0.19716	0.19716	0.77460	0.77460	1.83460	1.83450
0.50	0.02351	0.02351	0.05154	0.05154	0.18037	0.18037	0.73435	0.73435	1.82295	1.82284
0.55	0.02133	0.02133	0.04688	0.04688	0.16582	0.16582	0.69793	0.69793	1.81329	1.81318
0.60	0.01945	0.01945	0.04287	0.04287	0.15311	0.15311	0.66473	0.66473	1.80516	1.80505
0.65	0.01783	0.01783	0.03938	0.03938	0.14191	0.14191	0.63428	0.63428	1.79826	1.79813
0.70	0.01641	0.01641	0.03632	0.03632	0.13197	0.13197	0.60621	0.60621	1.79232	1.79220
0.75	0.01516	0.01516	0.03362	0.03362	0.12310	0.12310	0.58023	0.58023	1.78719	1.78705
0.80	0.01406	0.01406	0.03122	0.03122	0.11515	0.11515	0.55610	0.55610	1.78270	1.78256
0.85	0.01307	0.01307	0.02908	0.02908	0.10797	0.10797	0.53361	0.53361	1.77876	1.77861
0.90	0.01219	0.01219	0.02716	0.02716	0.10148	0.10148	0.51260	0.51260	1.77527	1.77512
0.95	0.01140	0.01140	0.02544	0.02544	0.09557	0.09557	0.49291	0.49291	1.77217	1.77201
1.00	0.01069	0.01069	0.02387	0.02387	0.09019	0.09019	0.47443	0.47443	1.76941	1.76924

Ref: Nath Das and Bera(2007).

Таблица 3. Численные результаты для моментов H-функции

c	Zeroth moment, $\alpha_0(c)$			First moment, $\alpha_1(c)$			Second moment, $\alpha_2(c)$		
	CHR	Ref	OURS	CHR	Ref	OURS	CHR	Ref	OURS
0.10	1.026334	1.026334	1.026334	0.515609	0.515611	0.515611	0.344357	0.344358	0.344358
0.20	1.055728	1.055728	1.055728	0.533154	0.533154	0.533154	0.356787	0.356788	0.356788
0.30	1.088933	1.088933	1.088933	0.553123	0.553121	0.553121	0.370985	0.370984	0.370984
0.40	1.127017	1.127017	1.127017	0.576210	0.576213	0.576213	0.387466	0.387468	0.387468
0.50	1.171573	1.171573	1.171573	0.603495	0.603484	0.603484	0.407030	0.407024	0.407024
0.60	1.225148	1.225148	1.225148	0.636636	0.636633	0.636633	0.430922	0.430921	0.430921
0.70	1.292221	1.292221	1.292221	0.678674	0.678668	0.678668	0.461423	0.461420	0.461420
0.80	1.381966	1.381966	1.381966	0.735808	0.735815	0.735815	0.503218	0.503224	0.503224
0.90	1.519494	1.519494	1.519494	0.825318	0.825316	0.825316	0.569449	0.569449	0.569449
1.00	2.000000	2.000000	1.999959	1.154701	1.154701	1.154671	0.820352	0.820353	0.820330

Ref: Nath Das and Bera(2007).

методах. Разница может исчезнуть при использовании набора квадратур более высокого порядка. В таблице 3 приведены численные результаты для нулевого, первого и второго моментов H-функции. Наши значения почти такие же, как и в литературе. В заключение следует отметить, что, так как вычисления на компьютере выполняются в несколько этапов, обычно возникают ошибки округления. Поскольку мы знаем, что при использовании квадратур Гаусса—Лежандра требуются многоступенчатые вычисления, мы выполнили наши вычисления с $N = 10$, чтобы избежать ошибок округления, которые с большей вероятностью могут возникнуть при аппроксимациях более высокого порядка. Кроме того, из практически полного соответствия между численными результатами, полученными в данном исследовании, и результатами из литературы видно, что аппроксимации такого порядка достаточно, чтобы проиллюстрировать эффективность и сходимость настоящего метода. Поэтому мы считаем, что наш порядок аппроксимации является приемлемым для данного исследования.

Однако аппроксимации более высокого порядка также могут применяться, но следует отметить, что в этом случае избежать множественных ошибок округления будет невозможно.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Данная работа финансировалась за счет средств бюджета организации. Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1972).
2. V. Ambarzumian, Zeitschrift fur Physik **52** (3–4), 263 (1929). DOI:10.1007/BF01342401
3. F. Anlı and H. Öztürk, Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer **272**, article id. 107764 (2021). DOI:10.1016/j.jqsrt.2021.107764
4. G. D. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, 3rd ed., (Academic Press, Inc., London, 1985).
5. P. B. Bosma and W. A. de Rooij, Astron. and Astrophys. **126** (2), 283 (1983).
6. J. P. Boyd, Journal of Computational Physics **64** (1), 266 (1986). DOI:10.1016/0021-9991(86)90031-8
7. J. P. Boyd, Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer **94** (3), 467 (2005). DOI:10.1016/j.jqsrt.2004.12.036
8. S. Chandrasekhar, *Radiative Transfer* (Dover, New York, 1960).
9. S. Chandrasekhar and F. H. Breen, Astrophys. J. **106**, 143 (1947). DOI:10.1086/144948
10. B. D. Ganapol, D. Mostacci, and A. Previti, Journal of Computational Physics **316**, 814 (2016). DOI:10.1016/j.jcp.2016.02.049
11. A. Jablonski, Computer Physics Communications **235**, 489 (2019). DOI:10.1016/j.cpc.2018.07.005
12. K. Kawabata and T. Satoh, Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer **47** (1), 1 (1992). DOI:10.1016/0022-4073(92)90074-E
13. K. Kawabata, T. Satoh, and S. Ueno, Astrophys. and Space Sci. **182** (2), 249 (1991). DOI:10.1007/BF00645005
14. C. T. Kelley, Journal of Mathematical Physics **21** (7), 1625 (1980). DOI:10.1063/1.524647
15. R. Nath Das and R. Bera, arXiv e-prints astro/ph:0711.3336 (2007). DOI:10.48550/arXiv.0711.3336
16. V. Natraj and J. W. Hovenier, Astrophys. J. **748** (1), article id. 28 (2012). DOI:10.1088/0004-637X/748/1/28
17. H. Öztürk and F. Anlı, Indian Journal of Physics **97** (8), 2289 (2023). DOI:10.1007/s12648-023-02604-3
18. G. C. Pomraning, Transport Theory and Statistical Physics **19** (6), 515 (1990). DOI:10.1080/00411459008260821
19. C. Siewert, Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer **15** (9), 851 (1975). DOI:10.1016/0022-4073(75)90096-5
20. R. Simovic, Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer **61** (1), 59 (1999). DOI:10.1016/S0022-4073(97)00199-4
21. S. R. Vatsya, Journal of Mathematical Physics **23**, 1728 (1982). DOI:10.1063/1.525562
22. M. Waseem, M. A. Noor, and K. I. Noor, Applied Mathematics and Computation **275**, 134 (2016). DOI:10.1016/j.amc.2015.11.061

Compact Formulation for Numerical Solution of Chandrasekhar's H-Function

H. Öztürk[1], F. Anlı[2], and A. Kadem[3]

[1]Osmaniye Korkut Ata University, Osmaniye, 80000 Turkey
[2]Kahramanmaras Sütçü İmam University, Kahramanmaraş, 46040 Turkey
[3]Ferhat Abbas University, Setif, 19137 Algeria

Chandrasekhar's H-function plays an important role in applied sciences, such as radiative transfer scattering theory. In this paper a numerical solution of the nonlinear integral equation for Chandrasekhar's H-function and its first derivative has been derived. In addition, numerical results for the zeroth, first, and second moments of the H-function are obtained. We have arranged a compact formulation for the Gauss-shifted Legendre quadrature set and used it for numerical computation.It can be seen from the derivation of the equations and application of the numerical method explained in detail that the present method can be applied to other problems in applied sciences. Numerical results consistent with those available in the literature have been obtained even in low-order approximations. Accordance between them corresponds to a difference of about 0.01%. This explicitly illustrates the accuracy and capability of the method.

Keywords: *Chandrasekhar's H-function—radiative transfer—Gauss–Legendre quadrature*