

УДК 524.882-17

# АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ТОЛСТЫХ ФОТОННЫХ КОЛЕЦ ВОКРУГ ЧЕРНЫХ ДЫР

© 2026 С. В. Чернов<sup>1\*</sup> 

<sup>1</sup>Астрокосмический центр Физического института им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, 117997 Россия  
Поступила в редакцию 15 мая 2025 года; после доработки 8 августа 2025 года; принята к публикации 18 августа 2025 года

Общая теория относительности предсказывает существование бесконечного числа вложенных фотонных колец вокруг черных дыр, каждое из которых содержит информацию о свойствах искривленного пространства-времени. В данной статье разрабатываются аналитические модели толстого гауссового асимметричного фотонного кольца и вычисляется функция видности с базами вплоть до шести диаметров Земли.

Ключевые слова: физика черных дыр — методы: численные

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Черные дыры (ЧД) остаются одними из самых загадочных объектов общей теории относительности (ОТО). Вопрос их существования напрямую связан с вопросом тестирования ОТО в сильном гравитационном поле. Так, в апреле 2019 года группа «Телескопа горизонта событий» (ТГС, Event Horizon Telescope<sup>1</sup>)—ЕНТ) впервые получила образ —изображение «тени» — сверхмассивной черной дыры (СМЧД) в эллиптической галактике M 87 (Akiyama et al., 2019), а позднее и СМЧД Sagittarius A\* (Sgr A\*) в центре нашей Галактики (Akiyama et al., 2022), что открыло новую эру тестирования ОТО в сильном гравитационном поле. Однако из-за низкого углового разрешения и недостаточного качества изображения группе ТГС не удалось оценить параметры пространства-времени, в частности спин ЧД.

Космическая обсерватория «Миллиметрон» станет первым субмиллиметровым космическим интерферометром, способным наблюдать более тонкие структуры образа ЧД, такие как фотонные кольца (Kardashev et al., 2014; Ivanov et al., 2019; см. также Rudnitskiy et al., 2023, где предлагается космическая концепция спутников, способных получать качественные детальные образы ЧД). «Миллиметрон» будет обладать пространственным разрешением вплоть до десятков угловых наносекунд, что в тысячу раз превышает аналогичную характеристику ТГС. Благодаря рекордному угловому разрешению обсерватории «Миллиметрон»,

станет возможным достаточно точно восстановить образ черной дыры, включая структуру первого фотонного кольца (Likhachev et al., 2022). Это позволит измерить спин черной дыры, для чего потребуется аппроксимировать наблюдательные данные с помощью аналитических моделей.

В данной работе мы сосредоточимся на аналитических моделях с асимметричным и радиальным гауссовым профилем распределения интенсивности в толстом кольце. В отличие от бесконечно тонкого симметричного кольца (Johnson et al., 2020), такие модели образуют серп и зависят как от радиуса кольца, так и от его толщины. Это позволит оценить толщину кольца и параметр асимметрии на основе будущих наблюдений.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Откликом радиоинтерферометра на радиосигнал от источника на небе является функция видности, которая определяется следующим образом (см. с. 91, Thompson et al., 2017):

$$V(u, \phi_u) = \iint I(r, \phi_r) e^{-2\pi i u r \cos(\phi_r - \phi_u)} r dr d\phi_r, \quad (1)$$

где  $u$  — безразмерная проекция базы интерферометра, выраженная в единицах длин волн, а  $r, \phi_r$  — полярные координаты в картинной плоскости источника, выраженные в радианах.

Функцию распределения яркости источника на небе представим в виде произведения двух функций: радиальной  $I_r$  и азимутальной  $I_\phi$  (Чернов, 2025). Предполагаем, что радиальная функция распределения зависит только от радиальной

\*E-mail: chernov@td.lpi.ru

<sup>1</sup><https://eventhorizontelescope.org/>

координаты  $r$ , а азимутальная — от азимутального угла  $\phi_r$ . В общем виде это можно записать как

$$I(r, \phi_r) = I_r(r)I_\phi(\phi_r). \quad (2)$$

Радиальную часть опишем гауссовой функцией распределения следующим образом:

$$I_r(r) = e^{-\left(\frac{r-r_0}{\Delta r}\right)^2}, \quad (3)$$

где  $r_0$  — радиус и  $\Delta r$  — ширина кольца в радианах. Азимутальную часть представим асимметричной функцией распределения, заданной в виде (см. Tiede et al., 2022; Chernov, 2025; Chernov et al., 2025)

$$I_\phi(\phi_r) = \left(1 - B \sin^2 \frac{\phi_r - \phi_0}{2}\right)^n, \quad (4)$$

где  $B$  — параметр асимметрии,  $\phi_0$  — направление на максимальную яркость в кольце, а  $n$  — степень асимметрии. В работе Chernov (2025) рассматривался случай, когда  $n = 1$ . В данной работе мы разберем случаи, когда  $n = 0$ ,  $n = 2$  и  $n = 0.5$ . На рис. 1 приведены примеры распределения яркости в кольце в зависимости от степени асимметрии для значений  $n = 0; 0.5; 2; 10$ . Для случая  $n = 0$  яркость равномерно распределена по всему кольцу, что означает отсутствие зависимости от угла  $\phi$ . При  $n = 0.5$  яркость увеличивается от минимального значения к максимуму, достигая пика в направлении  $\phi = \pi$ , что создает легкую асимметрию: яркость выше в одной части кольца. Для случая  $n = 2$  яркость становится значительно более асимметричной, с резким увеличением в направлении максимума. При этом яркость гораздо выше в области, соответствующей углу  $\phi = \pi$ , и быстро спадает к краям кольца. При  $n = 10$  яркость будет крайне асимметричной, с очень резким пиком в направлении максимума: большая часть яркости сосредоточится в узкой области вокруг угла  $\phi = \pi$ . Все образы имеют разрешение 80 на 80 мксд и число пикселей 2048 на 2048.

Отметим, что в реалистичных ситуациях параметр асимметрии может зависеть как от спина черной дыры, так и от угла наклона ее оси вращения относительно луча зрения. В данной работе мы ограничиваемся рассмотрением варианта, в котором параметр асимметрии является постоянной (независимой) величиной.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Здесь мы рассмотрим два случая, когда степень асимметрии равна 0 и 2. Более сложный вариант, при  $n = 0.5$ , приведен в Приложении.

#### 3.1. Случай $n = 0$

Начнем с наиболее простого симметричного случая. При  $n = 0$  функция видности (1) определяется выражением:

$$V(u, \phi_u) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r e^{-2\pi i u r \cos(\phi_r - \phi_u)} e^{-\left(\frac{r-r_0}{\Delta r}\right)^2} dr d\phi_r. \quad (5)$$

Благодаря симметрии распределения яркости источника функция видности является вещественной и не зависит от угла  $\phi_u$ . Интеграл по углу  $\phi_r$  может быть вычислен явно (см. Приложение). В результате получаем:

$$V(u) = 2\pi \int_0^\infty r J_0(2\pi u r) e^{-\left(\frac{r-r_0}{\Delta r}\right)^2} dr, \quad (6)$$

где  $J_0$  — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Это выражение зависит только от проекции базы, но не от угла  $\phi_u$ . Для вычисления этого интеграла разложим функцию Бесселя в предположении, что ее аргумент значительно больше единицы,  $2\pi u r \gg 1$ . Такое приближение справедливо для проекции баз порядка  $u \gg 1/(2\pi r) \sim 1/(2\pi r_0) \sim 10^9$  для  $r_0 = 20$  мксд, что в диаметрах Земли соответствует  $u \gg 0.17$  при  $\lambda = 1.3$  мм. Таким образом, данное приближение будет заведомо справедливо для проекции баз на шкале диаметра Земли и больше. Тогда функцию видности можно явно представить как

$$V(u) = \sqrt{\frac{2}{u}} \int_0^\infty \sqrt{r} (\sin(2\pi u r) + \cos(2\pi u r)) \times e^{-\left(\frac{r-r_0}{\Delta r}\right)^2} dr. \quad (7)$$

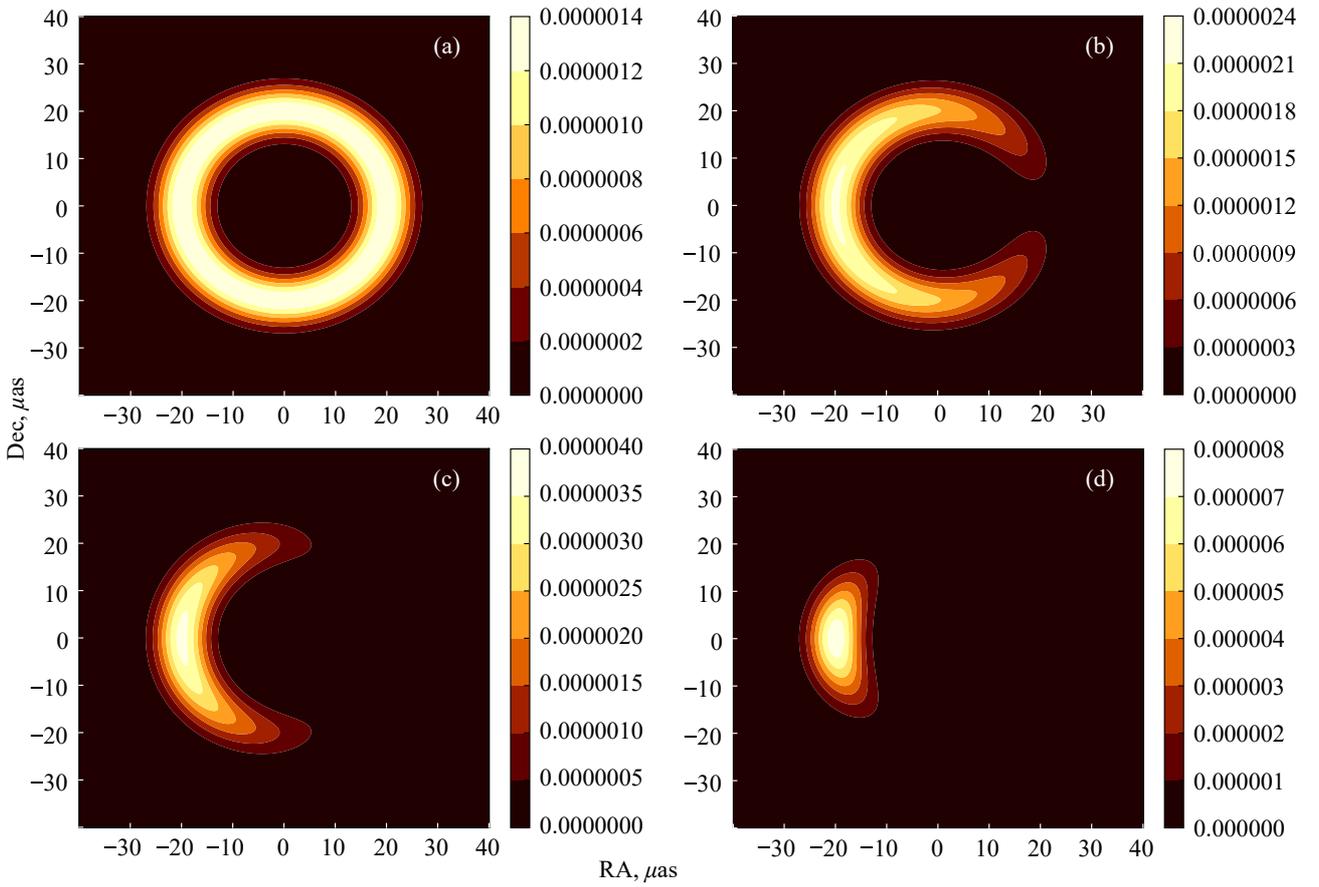
Данный интеграл (7) вычисляется аналитически с помощью формулы (3.953) из Gradshteyn and Ryzhik (1965). В итоге получаем:

$$V(u) = \frac{1}{\sqrt{2u}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{\Delta r^2}{2}\right)^{3/4} e^{-\frac{r_0^2}{2\Delta r^2} - \frac{\pi^2 u^2 \Delta r^2}{2}} \times \left[ (1-i)e^{i\pi u r_0} D_{-3/2}(\sqrt{2}c_-) + (1+i)e^{-i\pi u r_0} D_{-3/2}(\sqrt{2}c_+) \right], \quad (8)$$

где  $\Gamma$  — гамма-функция,  $D$  — функция Вебера (функция параболического цилиндра), а

$$c_\pm = -\frac{r_0}{\Delta r} \pm i\pi u \Delta r.$$

Данная функция видности зависит как от радиуса  $r_0$ , так и от ширины кольца  $\Delta r$ . Несмотря на то что выражение (8) содержит мнимые единицы, мнимая часть функции видности равна нулю. Это



**Рис. 1.** Распределение яркости в кольце для различных значений степени асимметрии:  $n = 0$  (a),  $n = 0.5$  (b),  $n = 2$  (c) и  $n = 10$  (d). Во всех случаях радиус кольца составляет  $r_0 = 20$  мксд, ширина кольца —  $\Delta r = 5$  мксд, параметр асимметрии —  $B = 1$ , а суммарный поток в кольце —  $1$  Ян.

обусловлено симметрией фотонного кольца. Для удобства визуализации результатов функцию Вебера можно переписать через полиномы Эрмита (см. Приложение). В результате получаем:

$$V(u) = \frac{1}{\sqrt{2u}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Delta r^{3/2} e^{-\frac{r_0^2}{\Delta r^2}} \times \left[ (1 - i)H_{-3/2}(c_-) + (1 + i)H_{-3/2}(c_+) \right], \quad (9)$$

где  $H$  — полиномы Эрмита. Нормировка функции видности задается ее значением при малых проекциях базы и определяется следующим выражением:

$$V(u \rightarrow 0) = \sqrt{\frac{2}{u}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Delta r^{3/2} e^{-\frac{r_0^2}{\Delta r^2}} H_{-3/2}\left(-\frac{r_0}{\Delta r}\right), \quad (10)$$

На рис. 2 показана зависимость модуля функции видности от проекции базы в единицах длин волн. Синяя сплошная кривая соответствует численному интегрированию выражения (5), а зеленая штриховая — аналитической кривой, полученной по фор-

муле (9). Численное решение было определено с помощью пакета программ FINUFFT (Barnett et al., 2019). Как видно из рис. 2, аналитическое решение достаточно хорошо согласуется с численным.

### 3.2. Случай $n = 2$

При  $n = 2$  распределение яркости источника становится асимметричным, и азимутальную часть распределения яркости в кольце (4) можно представить в виде

$$I_\phi(\phi_r) = \left( 1 - B + \frac{3}{8}B^2 + \frac{2 - B}{2}B \cos(\phi_r - \phi_0) + \frac{B^2}{8} \cos(2(\phi_r - \phi_0)) \right). \quad (11)$$

Если подставить функцию распределения яркости источника (2) с азимутальной частью (11) в функцию видности (1), то интеграл по углу  $\phi_r$  можно вычислить аналитически точно (табличные интегралы, использованные в расчетах, приведены

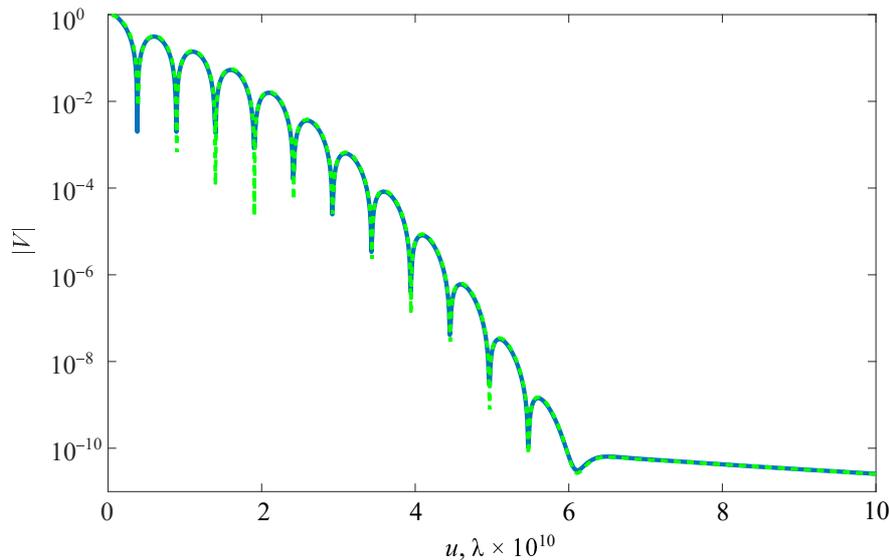


Рис. 2. Зависимость модуля функции видности от проекции базы для случая, когда степень асимметрии равна нулю,  $n = 0$ .

в Приложении). В результате получаем:

$$V(u, \phi_u) = 2\pi \int \left[ \left( 1 - B + \frac{3}{8}B^2 \right) J_0(2\pi ur) - \frac{B^2}{8} J_2(2\pi ur) \cos(2(\phi_0 - \phi_u)) - i \frac{2-B}{2} B J_1(2\pi ur) \cos(\phi_0 - \phi_u) \right] I_r(r) r dr, \quad (12)$$

где  $J_1$  и  $J_2$  — функции Бесселя первого и второго порядка соответственно. Данная функция видности является комплексной из-за асимметрии азимутальной функции распределения яркости (11). Если параметр асимметрии равен нулю ( $B = 0$ ), функция видности (12) становится вещественной. По аналогии с предыдущим случаем раскладываем функции Бесселя, предполагая, что их аргумент значительно больше единицы ( $2\pi ur \gg 1$ ). Тогда выражение (12) можно переписать в виде

$$V(u, \phi_u) = 2 \int \left[ \left( 1 - B + \frac{3}{8}B^2 + \frac{B^2}{8} \cos(2(\phi_0 - \phi_u)) \right) \frac{\sin(2\pi ur) + \cos(2\pi ur)}{\sqrt{2ur}} - i \frac{2-B}{2} B \cos(\phi_0 - \phi_u) \frac{\sin(2\pi ur) - \cos(2\pi ur)}{\sqrt{2ur}} \right] \times e^{-\left(\frac{r-r_0}{\Delta r}\right)^2} r dr. \quad (13)$$

Полученный интеграл (13) вычисляется аналитически с использованием формулы (3.953) из Gradshteyn and Ryzhik (1965). В результате инте-

грирования получаем:

$$V(u, \phi_u) = \frac{1 - B + \frac{3}{8}B^2 + \frac{B^2}{8} \cos(2(\phi_u - \phi_0))}{\sqrt{2u}} \times \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{\Delta r^2}{2}\right)^{3/4} \exp\left(-\frac{r_0^2}{2\Delta r^2} - \frac{\pi^2 u^2 \Delta r^2}{2}\right) \times (1 - i) \left[ \exp(i\pi ur_0) D_{-3/2}(\sqrt{2}c_-) + i \exp(-i\pi ur_0) D_{-3/2}(\sqrt{2}c_+) \right] - i(2 - B) B \frac{\cos(\phi_u - \phi_0)}{\sqrt{8u}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{\Delta r^2}{2}\right)^{3/4} \times \exp\left(-\frac{r_0^2}{2\Delta r^2} - \frac{\pi^2 u^2 \Delta r^2}{2}\right) \times (i - 1) \left[ i \exp(i\pi ur_0) D_{-3/2}(-\sqrt{2}c_-) + \exp(-i\pi ur_0) D_{-3/2}(\sqrt{2}c_+) \right]. \quad (14)$$

Данная функция видности существенно отличается от случая, когда степень асимметрии равна нулю,  $n = 0$ . Во-первых, функция видности является комплексной. Во-вторых, она зависит не только от проекции базы, но и от направления  $\phi_u$ . В двух перпендикулярных направлениях ( $\phi_u = 0$  и  $\pi/2$ ) функция видности принимает разные значения. В частности, в направлении  $\phi_u = \phi_0 + \pi/2$  выражение (14) становится вещественным.

Мы также представили функцию видности через полиномы Эрмита, что позволило упростить визуализацию и анализ. В результате получаем

выражение:

$$\begin{aligned}
 V(u, \phi_u) &= \frac{1 - B + \frac{3}{8}B^2 + \frac{B^2}{8} \cos(2(\phi_u - \phi_0))}{\sqrt{2u}} \\
 &\times \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Delta r^{3/2} \exp\left(-\frac{r_0^2}{\Delta r^2}\right) \\
 &\times (1 - i) \left[ H_{-3/2}(c_-) + i H_{-3/2}(c_+) \right] \\
 &- i(2 - B) B \frac{\cos(\phi_u - \phi_0)}{\sqrt{8u}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Delta r^{3/2} \\
 &\times \exp\left(-\frac{r_0^2}{\Delta r^2}\right) (i - 1) \\
 &\times \left[ i H_{-3/2}(c_-) + H_{-3/2}(c_+) \right], \quad (15)
 \end{aligned}$$

которое демонстрирует, что не только радиус, но и толщина кольца влияет на поведение функции видности. Нормировка функции видности была определена в зависимости от направления проекции базы  $\phi_u$ , что также подчеркивает важность учета асимметрии в анализе:

$$\begin{aligned}
 V(u \rightarrow 0, \phi_u) &= \sqrt{\frac{2}{u}} \left( 1 - B + \frac{3}{8}B^2 \right. \\
 &+ \left. \frac{B^2}{8} \cos(2(\phi_u - \phi_0)) \right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Delta r^{3/2} \\
 &\times \exp\left(-\frac{r_0^2}{\Delta r^2}\right) H_{-3/2}\left(-\frac{r_0}{\Delta r}\right) \\
 &- i(2 - B) B \frac{\cos(\phi_u - \phi_0)}{\sqrt{2u}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Delta r^{3/2} \\
 &\times \exp\left(-\frac{r_0^2}{\Delta r^2}\right) H_{-3/2}\left(-\frac{r_0}{\Delta r}\right). \quad (16)
 \end{aligned}$$

На рис. 3 показан пример распределения модуля функции видности для двух перпендикулярных направлений,  $\phi_u = 0$  и  $\pi/2$ , в зависимости от проекции базы в длинах волн. Параметры кольца были выбраны следующие: радиус кольца  $r_0 = 20$  мксд, ширина кольца  $w = 5$  мксд, параметр асимметрии  $B = 1$ , направление на максимум яркости  $\phi_0 = \pi$ . Черная и синяя кривые были получены по формуле (15), а зеленая и красная — с помощью численного интегрирования уравнения (1). Черная и зеленая кривые соответствуют направлению проекции баз  $\phi_u = 0$ , синяя и красная — направлению  $\phi_u = \pi/2$ .

Аналогичным образом могут быть вычислены функции видности для других целых степеней асимметрии,  $n = 3, 4, \dots$ . В Приложении рассмотрен случай, когда степень асимметрии составляет  $n = 0.5$ , а параметр асимметрии равен единице,  $B = 1$ .

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье были разработаны аналитические модели фотонного кольца с учетом асимметричного и гауссового профиля распределения яркости источника в зависимости от параметров задачи. Исследовано несколько моделей с различными значениями степени асимметрии. Главным результатом работы стало получение аналитических выражений для функции видности, которые зависят не только от радиуса кольца, но и от его ширины. Это позволит более универсально и точно фитировать наблюдательные данные космических РСДБ-миссий, в частности космической обсерватории «Миллиметрон». Показано, что функция видности является комплексной и зависит от направления проекции базы. Также вычислены ее амплитуды в двух перпендикулярных направлениях; форма функции видности в этих направлениях может значительно различаться. Эти выводы способствуют улучшению методов обработки и интерпретации данных наблюдений.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим более сложный случай, когда степень асимметрии равна  $n = 0.5$ . Кроме того, представим основные формулы, которые использовались для вывода функции видности.

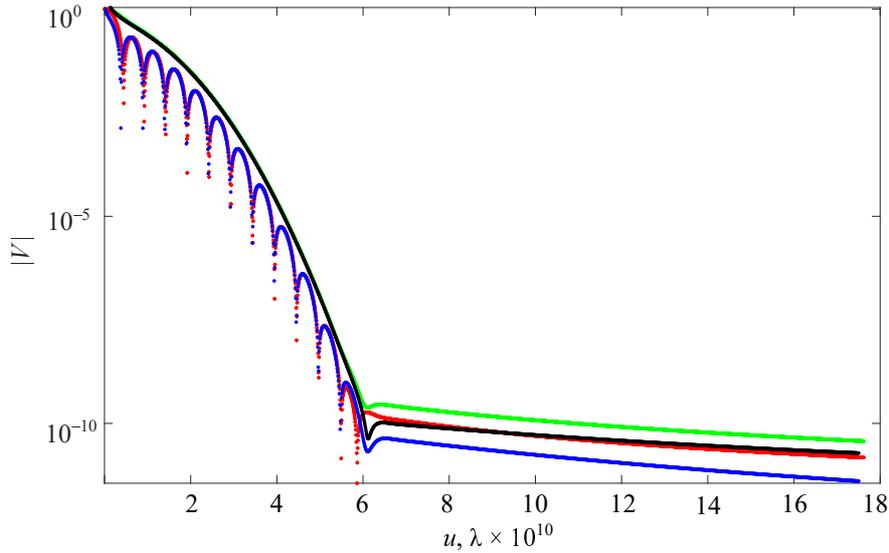
#### Случай $n = 0.5$

Для случая, когда степень асимметрии составляет  $n = 0.5$ , мы также предположим, что параметр асимметрии равен единице,  $B = 1$ . Это значительно упростит задачу и позволит нам провести аналитические вычисления до конца. При этом азимутальное распределение яркости источника запишется в следующем виде:

$$I_\phi(\phi_r) = \cos\left(\frac{\phi_r - \phi_0}{2}\right). \quad (17)$$

Из вышеизложенного и формы азимутального распределения яркости (17) можно сделать вывод, что функция видности будет комплексной величиной. Интеграл по углу  $\phi_r$  вычисляется аналитически точно с использованием производящей функции (24) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{\phi_r - \phi_0}{2}\right) e^{-2\pi i u r \cos(\phi_r - \phi_u)} d\phi_r \\
 &= 4 \sin\left(\frac{\phi_0}{2}\right) J_0(2\pi u r) + 8 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \\
 &\times \frac{2n \cos\left(\frac{\phi_0}{2}\right) \sin(\tilde{\phi}_u) - \sin\left(\frac{\phi_0}{2}\right) \cos(\tilde{\phi}_u)}{4n^2 - 1} J_n(2\pi u r), \quad (18)
 \end{aligned}$$



**Рис. 3.** Зависимость модуля функции видности от проекции базы в длинах волн в двух перпендикулярных направлениях,  $\phi_u = 0$  и  $\phi_u = \pi/2$ .

где введено обозначение  $\tilde{\phi}_u = n\phi_u - n\pi$ . Первое слагаемое является вещественным и не зависит от направления проекции базы  $\phi_u$ . В случае, когда максимум яркости источника расположен под углом  $\phi_0 = \pi$ , функция видности (18) в направлении  $\phi_u = \pi/2$  становится вещественной. В противном случае, когда  $\phi_u \neq \pi/2$ , функция видности будет комплексной.

Подставляя выражение (18) в функцию видности (1) и интегрируя с помощью выражения (3.953) из Gradshteyn and Ryzhik (1965) в предположении больших проекций баз ( $2\pi ur \gg 1$ ) получаем:

$$\begin{aligned}
 V(u, \phi_u) &= \sqrt{\frac{2 \sin \frac{\phi_0}{2}}{u \pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{\Delta r^2}{2}\right)^{3/4} \\
 &\times (1-i) e^{-\frac{r_0^2}{2\Delta r^2} - \frac{\pi^2 u^2 \Delta r^2}{2}} \left[ e^{i\pi ur_0} D_{-3/2}(\sqrt{2}c_-) \right. \\
 &\left. + i e^{-i\pi ur_0} D_{-3/2}(\sqrt{2}c_+) \right] \\
 &+ \frac{4}{\sqrt{\pi^2 u}} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n \cos \frac{\phi_0}{2} \sin(\tilde{\phi}_u) - \sin \frac{\phi_0}{2} \cos(\tilde{\phi}_u)}{4n^2 - 1} \\
 &\times \left(\frac{\Delta r^2}{2}\right)^{3/4} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) e^{-\frac{r_0^2}{2\Delta r^2} - \frac{\pi^2 u^2 \Delta r^2}{2}} \\
 &\times \left[ e^{i\pi ur_0 - i(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2})} D_{-3/2}(\sqrt{2}c_-) \right. \\
 &\left. + e^{-i\pi ur_0 + i(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2})} D_{-3/2}(\sqrt{2}c_+) \right], \quad (19)
 \end{aligned}$$

где  $\Gamma$  — гамма-функция,  $D$  — функция Вебера (функция параболического цилиндра). Данная функция видности (19) представляет собой общее выражение для степени асимметрии  $n = 0.5$ ,

и записывается через функцию Вебера. Аналогично предыдущим вычислениям функцию видности можно выразить через полиномы Эрмита:

$$\begin{aligned}
 V(u, \phi_u) &= \sqrt{\frac{2 \sin \frac{\phi_0}{2}}{u \pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Delta r^{3/2} e^{-\frac{r_0^2}{\Delta r^2}} \\
 &\times (1-i) \left[ H_{-3/2}(c_-) + i H_{-3/2}(c_+) \right] \\
 &+ \frac{4\Delta r^{3/2}}{\sqrt{\pi^2 u}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) e^{-\frac{r_0^2}{\Delta r^2}} \\
 &\times \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n \cos \frac{\phi_0}{2} \sin(\tilde{\phi}_u) - \sin \frac{\phi_0}{2} \cos(\tilde{\phi}_u)}{4n^2 - 1} \\
 &\times \left[ e^{-i(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2})} H_{-3/2}(c_-) + e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2})} H_{-3/2}(c_+) \right]. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Для упрощения выражения (20) рассмотрим поведение функции видности в двух перпендикулярных направлениях:  $\phi_u = 0$  и  $\phi_u = \pi/2$ . Дополнительно предположим, что выполнено условие  $\phi_0 = \pi$ , как показано на рис. 1. В этом случае суммы, входящие в выражение (20), могут быть просуммированы аналитически. В результате получаем для  $\phi_u = 0$ :

$$\begin{aligned}
 V(u, \phi_u) &= \sqrt{\frac{1}{2u}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Delta r^{3/2} e^{-\frac{r_0^2}{\Delta r^2}} \\
 &\times (1-i) H_{-3/2}(c_-), \quad (21)
 \end{aligned}$$

для  $\phi_u = \pi/2$ :

$$V(u, \phi_u) = \sqrt{\frac{2}{\pi^2 u}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Delta r^{3/2} e^{-\frac{r_0^2}{\Delta r^2}} (1-i)$$

$$\times \left[ \frac{\sqrt{2}\pi}{4} H_{-3/2}(c_-) + i H_{-3/2}(c_+) \left( 1 + \frac{i}{3}d \right) \right], \quad (22)$$

где

$$d = {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}, -i\right) - {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}, i\right) \approx -0.332i.$$

### Основные соотношения

В этом разделе мы представим основные соотношения, которые были использованы для вывода функции видности. Для расчета ее азимутальной части применялись следующие табличные интегралы:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{-iz \cos(\phi_r - \phi_u)} d\phi_r &= 2\pi J_0(z), \\ \int_0^{2\pi} \cos(\phi_r - \phi_0) e^{-iz \cos(\phi_r - \phi_u)} d\phi_r &= -2\pi i J_1(z) \cos(\phi_0 - \phi_u), \\ \int_0^{2\pi} \cos(2(\phi_r - \phi_0)) e^{-iz \cos(\phi_r - \phi_u)} d\phi_r &= -2\pi J_2(z) \cos(2\phi_0 - 2\phi_u), \end{aligned} \quad (23)$$

которые можно легко вычислить с помощью производящей функции (Janke et al., 1960):

$$e^{\frac{z}{2}(t - \frac{1}{t})} = J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} [t^n + (-t)^{-n}] J_n(z). \quad (24)$$

Если в выражение (24) подставить  $t = -ie^{i(\phi_r - \phi_u)}$ , получим

$$\begin{aligned} e^{-iz \cos(\phi_r - \phi_u)} &= J_0(z) \\ &+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \cos(n(\phi_r - \phi_u)) J_n(z). \end{aligned} \quad (25)$$

Для вычисления радиальной части функции видности было использовано асимптотическое разложение функций Бесселя при больших значениях аргумента ( $|x| \rightarrow \infty$ ). Это разложение запишем в следующем виде (Zaitsev and Polyaniin, 2003):

$$\begin{aligned} J_0(x) &\approx \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\pi x}}, \quad J_1(x) \approx \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\pi x}}, \\ J_2(x) &\approx -\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\pi x}}, \\ J_\nu(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \quad (26)$$

Для визуализации функции Вебера комплексного аргумента можно использовать полиномы Эрмита (Murzewski and Sowa, 1972):

$$D_\mu(z) = 2^{-\mu/2} e^{-z^2/4} H_\mu\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right). \quad (27)$$

Для  $\mu = -3/2$  получаем:

$$D_{-3/2}(z) = 2^{3/4} e^{-z^2/4} H_{-3/2}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right). \quad (28)$$

Полиномы Эрмита, в свою очередь, можно представить через гипергеометрическую функцию

$$\begin{aligned} H_\nu(z) &= 2^\nu \sqrt{\pi} \left( \frac{{}_1F_1\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2z}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)} {}_1F_1\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}, z^2\right) \right), \end{aligned} \quad (29)$$

и для  $\nu = -3/2$  получаем:

$$\begin{aligned} H_{-3/2}(z) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{3/2}} \left( \frac{{}_1F_1\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, z^2\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2z}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} {}_1F_1\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}, z^2\right) \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Для вычисления функции видности в направлении проекции базы  $\phi_u = \pi/2$  были использованы следующие выражения:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} &= \frac{1}{2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{4n^2 - 1} &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{8}\pi, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{4n^2 - 1} &= -\frac{i}{6} \\ &\times \left[ {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}, -i\right) - {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}, i\right) \right], \end{aligned} \quad (31)$$

где  ${}_2F_1$  — гипергеометрическая функция. Последнее выражение является вещественным.

### БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит рецензента за полезные замечания.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа финансировалась за счет средств бюджета института. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. K. Akiyama et al. (EHT Collab.) *Astroph. J.* **875** (1), article id. L1 (2019). DOI:10.3847/2041-8213/ab0ec7
2. K. Akiyama et al. (EHT Collab.), *Astrophys. J.* **930** (2), id. L12 (2022). DOI:10.3847/2041-8213/ac6674
3. A. H. Barnett, J. F. Magland, and L. af Klinteberg, *SIAM Journal on Scientific Computing* **41** (5), 479 (2019). DOI:10.1137/18M120885X
4. S. V. Chernov, *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **167** (6), 800 (2025). DOI:10.31857/S0044451025060057
5. S. V. Chernov, M. A. Shchurov, I. I. Bulygin, and A. G. Rudnitskiy *Astronomy Reports* **69** (10), 1023 (2025). DOI:10.1134/S1063772925702257
6. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Fizmatlit, Moscow, 1963). [in Russian]
7. P. B. Ivanov, E. V. Mikheeva, V. N. Lukash, et al., *Physics–Uspekhi* **62** (5), 423 (2019). DOI:10.3367/UFNe.2018.03.038308
8. E. Janke, F. Emde, and F. Lösch, *Tables of Higher Functions*, 3rd ed. (Nauka, Moscow, 1977).
9. M. D. Johnson, A. Lupsasca, A. Strominger, et al., *Science Advances* **6** (12), eaaz1310 (2020). DOI:10.1126/sciadv.aaz1310
10. N. S. Kardashev, I. D. Novikov, V. N. Lukash, et al., *Physics–Uspekhi* **57**, 1199 (2014). DOI:10.3367/UFNe.0184.201412c.1319
11. S. F. Likhachev, A. G. Rudnitskiy, M. A. Shchurov, et al., *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **511** (1), 668 (2022). DOI:10.1093/mnras/stac079
12. J. Murzewski and A. Sowa, *Applicationes Mathematicae* **13** (2), 261 (1972). DOI:10.4064/am-13-2-261-273
13. A. G. Rudnitskiy, M. A. Shchurov, S. V. Chernov, et al., *Acta Astronautica* **202**, 361 (2023). DOI:10.1016/j.actaastro.2023.08.016
14. A. R. Thompson, J. M. Moran, and G. W. Swenson Jr., *Interferometry and Synthesis in Radio Astronomy*, 3rd ed. (Springer, Switzerland, 2017). DOI:10.1007/978-3-319-44431-4
15. P. Tiede, M. D. Johnson, D. W. Pesce, et al., *Galaxies* **10** (6), id. 111 (2022). DOI:10.3390/galaxies10060111
16. V. F. Zaitsev and A. D. Polyaniin, *Handbook of Ordinary Differential Equations*, Fizmatlit, Moscow, 4th ed. (Fizmatlit, Moscow, 2001) [in Russian].

## Analytical Approaches to Modeling Thick Photon Rings

S. V. Chernov<sup>1</sup><sup>1</sup>Astro Space Center, Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, 117997 Russia

General relativity predicts the existence of an infinite number of nested photon rings around black holes, each containing information about the properties of curved space-time. In this paper, analytical models of a thick Gaussian asymmetric photon ring are developed and the visibility function with baselines up to six Earth diameters is calculated.

Keywords: *black hole physics; methods: numerical*