Р О С С И Й С К А Я   А К А Д Е М И Я   Н А У К
СПЕЦИАЛЬНАЯ АСТРОФИЗИЧЕСКАЯ ОБСЕРВАТОРИЯ

П Р Е П Р И Н Т N 200

Д.А.Павлов, А.А Кочкаров

ОБ ОДНОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ПОКРЫТИЯ МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА ПРЕДФРАКТАЛЬНОГО ГРАФА ПРОСТЫМИ ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ЦЕПЯМИ

Нижний Архыз
2004

УДК 519.1

ОБ ОДНОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ПОКРЫТИЯ МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА ПРЕДФРАКТАЛЬНОГО ГРАФА ПРОСТЫМИ ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ЦЕПЯМИ

Д.А.Павлов, А.А.Кочкаров

Карачаево-Черкесская государственная технологическая академия,
г. Черкесск, Карачаево-Черкесия, Россия, 369000

Аннотация. Статья посвящена многокритериальной задаче покрытия предфрактальных графов пересекающимися простыми цепями. Представлен алгоритм выделяющий покрытие на предфрактальном (n,L)-графе, оптимальное по критерию $F_1(x)$ и оцениваемое по остальным критериям. Описанный алгоритм является полиномиальным.
Ключевые слова: предфрактальный (n,L)-граф, подграф-затравка, остовное дерево минимального веса.

ABOUT ONE MULTICRITERIA PROBLEM OF A COVERING OF A MINIMUM WEIGHT PREFRACTAL GRAPH BY SIMPLE INTERSECTED PATHS

D.A.Pavlov, A.A.Kochkarov

Abstract. The paper is devoted to the multicriteria problem of a covering prefractals graphs by intersected simple paths. An algorithm selecting a covering on prefractal (n,L)-graph, optimum by criterion $F_1(x)$ and estimated by remaining criteria is represented. The proposed algorithm is polynomial.
Keywords: prefractal (n,L)-graph, subgraph - seeding agent, spanning tree of a minimum weight.

1. Введение. Основные определения

Оговоримся заранее, что недостающие определения и понятия теории графов и предфрактальных графов можно найти в работах (Емеличев и др., 1990; Кочкаров, 1998).

Введем понятие предфрактального графа. Пусть $H=(W,Q)$ – n-вершинный связный граф с множеством вершин W, $|W|=n$ и множеством ребер $|Q|=q$. Условимся называть его «затравкой». В качестве обобщения известной операции «расщепления вершины графа» (Кочкаров, 1998) определим операцию «замещения вершины затравкой» (ЗВЗ). Для произвольного графа $G=(V,E)$ ее суть состоит в замещении вершины $v\in V$ графа n-вершинной затравкой $H=(W,Q)$. При этом каждое ребро $(v,v')\in E$, $v'\in V$, инцидентное вершине v, удаляется и заменяется на $(u,v')\in E$, где $u\in W$ – вершина затравки, выбираемая либо произвольно, либо по определенному закону (Кочкаров, 1998). Определим поэтапный процесс выполнения операции ЗВЗ. На этапе $l=1$ в данной затравке $H=(W,Q)$ нумеруем вершины и ребра – получаем граф, обозначаемый через $G_1=(V_1,E_1)$, т.е. $G_1=(V_1,E_1)=H=(W,Q)$. Пусть выполнены этапы $l=1,2,...,L$ и по завершении этапа L получен граф $G_L=(V_L,E_L)$ из $G_{L-1}=(V_{L-1},E_{L-1})$ заменой каждой его вершины затравкой $H=(W,Q)$. Полученный граф будем называть предфрактальным (n,L)-графом, где $|W|=n$. Процесс порождения предфрактального графа G_L, по существу, есть процесс построения последовательности предфрактальных графов $G_1,G_2,...,G_l,...,G_L$, называемой *траекторией*.

Для предфрактального графа G_L ребра, появившиеся на l-ом, $l\in\{1,2,...,L\}$ этапе порождения, будем называть *ребрами ранга* l. *Новыми* ребрами предфрактального графа G_L назовем ребра ранга L, а все остальные ребра назовем *старыми*.

Если из предфрактального графа G_L, порожденного n-вершинной затравкой H, последовательно удалить все старые ребра (ребра ранга l, $l=1,2,...,L-1$), то исходный граф распадется на множество связных компонент $B_{l,s}^{(1)}$, $s=\overline{1,n^{l-1}}$, изоморфных (Емеличев и др., 1990) затравке H. Множество компонент $\{B_L^{(1)}\}$ будем называть *блоками первого ранга*. Аналогично, при удалении из предфрактального графа G_L всех старых ребер рангов $l=1,2,...,L-2$, получим множество *блоков* $\{B_L^{(2)}\}$ *второго ранга*. Обобщая скажем, что при удалении из предфрактального графа G_L всех ребер рангов $l = 1,2,...,L-r$, получим множество $\{B_{L,i}^{(r)}\}$, $r \in \{1,2,...,L-1\}$, *блок* r*-го ранга*, где $i = 1,2,...,n^{L-r}$ – порядковый номер блока. Блоки $B_L^{(1)} \subseteq G_L$ первого ранга также будем называть *подграф-затравками* H предфрактального графа G_L.Очевидно, что всякий блок $B_L^{(r)} = (U_L^{(r)}, M_L^{(r)})$, $r \in \{1,2,...,L-1\}$ является предфрактальным графом $B_r = (U_r, M_r)$, порожденным затравкой H.

Термином *подграф-затравка* $z_s^{(l)}$ будем называть блок $B_{l,s}^{(1)}$, $s = \overline{1,n^{l-1}}$ первого ранга предфрактального графа G_l, $l = \overline{1,L}$ из траектории. Последовательное выделение подграф-затравок $z_s^{(l)}$ на графах $G_1, G_2,..., G_L$ из траектории предфрактального графа G_L разбивает множество ребер E_L на непересекающиеся подмножества подграф-затравок $Z(G_L) = \{z_s^{(l)}\}$, где $l = \overline{1,L}$, – ранг подграф-затравки, а $s = \overline{1,n^{l-1}}$ – ее порядковый номер.

Будем говорить, что *предфрактальный граф* $G_L = (V_L, E_L)$ *– взвешен*, если каждому его ребру $e^{(l)} \in E_L$ приписано действительное число $w(e^{(l)}) \in (\theta^{l-1}a, \theta^{l-1}b)$, где $l = \overline{1,L}$ – ранг ребра, $a > 0$, и $\theta < \frac{a}{b}$.

2. Многокритериальная постановка задачи о покрытии предфрактального графа простыми пересекающимися цепями

Рассмотрим взвешенный предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$, порожденный затравкой $H = (W, Q)$, у которой $|W| = n$, $|Q| = q$.

Покрытием вида $\aleph$ графа G_L будем называть подграф $x = (V_L, E_x)$, $E_x \subseteq E_L$, состоящий из множества таких простых цепей $\{C_1, C_2,..., C_k,..., C_K\}$, что между двумя произвольными вершинами из покрытия также существует простая цепь. Множество всех покрытий x обозначим через X. Очевидно, что покрытие $x = (V_L, E_x)$ является связным подграфом графа G_L и образуется простыми цепями, пересекающимися либо по вершинам, либо по ребрам. Поэтому кратчайшую цепь, имея в виду цепь с наименьшим суммарным весом ее ребер, из графа будем называть *максимальной (максимальной по включении)*, если она не является собственной подцепью какой-либо другой кратчайшей цепи (Павлов, 2004). Вообще говоря, наличие в покрытии $\aleph$ немаксимальных цепей не противоречит определению покрытия.

Простую цепь предфрактального графа G_L будем называть i*-смешанной цепью* и обозначим через C^i, если она состоит из ребер i различных рангов.

На множестве $x \in X$ покрытий графа $G_L = (V_L, E_L)$ определены векторно-целевые функции (ВЦФ) (Емеличев, Перепелица, 1989):

$$\mathrm{F}(X) = \{F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x), F_4(x), F_5(x)), x \in X\} \tag{1}$$

$$F_1(x) = \sum_{e \in E_x} w(e) \to \min, \tag{2}$$

где $\sum_{e \in E_x} w(e)$ – общий (суммарный) вес покрытия x;

$$F_2(x) = \min_{k=\overline{1,K}} w(C_k) \to \max, \tag{3}$$

где C_k – максимальная цепь, $k = \overline{1,K}$, из покрытия $x \in \{C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_K\}$, а $w(C_k)$ – ее длина (суммарный вес ребер цепи).

$$F_3(x) = N(x) \to \min, \tag{4}$$

где $N(x)$ – число всех максимальных цепей в покрытии x;

$$F_4(x) = i \to \min, \tag{5}$$

для всякой смешанной цепи C^i из покрытия x.

$$F_5(x) = \left|\rho_x(u,v) - \rho_{G_L}(u,v)\right| \to \min, \tag{6}$$

где для любых вершин $u, v \in V_L$ графа $\rho_x(u,v)$ – расстояние в покрытии x, а $\rho_{G_L}(u,v)$ – расстояние на графе G_L;

Напомним, что $\rho_{G_L}(u,v)$ – длина кратчайшей цепи $\{u,v\}$, а потому $\rho_{G_L}(u,v)$ – минимальная по сравнению с длинами цепей, соединяющих вершины $u, v \in V_L$ графа G_L на $\{x\}$.

Всевозможные покрытия $\{x\}$ предфрактального графа G_L образуют множество допустимых решений $X = X(G_L) = \{x\}$ (МДР) для ВЦФ (1) – (6).

3. Алгоритм α

Рассмотрим взвешенный предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$, порожденный затравкой $H = (W, Q)$, у которой $|W| = n$. Алгоритм α строит на графе G_L остовное дерево $T = (V_L, E_T)$ минимального веса (ОДМВ) (Емеличев, Перепелица, 1989).

Суть работы алгоритма заключается в следующем. Каждая подграф-затравка $z_s^{(l)}, l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$, из множества $Z(G_L)$ рассматривается как отдельно взятый граф. Последовательно на каждой из $\dfrac{n^L - 1}{n - 1}$ подграф-затравок, независимо друг от друга, находится ее ОДМВ $T_s^{(l)} = (V_s^{(l)}, E_{T_s^{(l)}})$. Поиск ОДМВ отдельно взятой подграф-затравки осуществляется алгоритмом Прима (Емеличев, Перепелица, 1989). Вообще говоря, для поиска ОДМВ можно использовать любой алгоритм. Алгоритм Прима используется в алгоритме α в качестве процедуры. Нахождение ОДМВ всех подграф-затравок $z_s^{(l)}$ позволяет построить ОДМВ предфрактального графа G_L.

Каждое ребро предфрактального графа имеет свой “уникальный” номер, однозначно идентифицирующий ребро во всей траектории. При необходимости по этому номеру можно будет определить, какой из подграф-затравок принадлежит выделенное ребро, а также и каким блокам предфрактального графа принадлежит это выделенное ребро. Таким образом, построение ОДМВ для подграф-затравки $z_s^{(l)}$ будет соответствовать выделению множества ребер на предфрактальном графе G_L.

АЛГОРИТМ α

Вход: взвешенный предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$.

Выход: ОДМВ $T = (V_L, E_T)$.

Шаг 1. Построить множество подграф-затравок $Z(G_L) = \{z_s^{(l)}\}$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$ для предфрактального графа G_L. В соответствии с построенным множеством $Z(G_L)$ пронумеровать все ребра предфрактального графа G_L.

Шаг 2. Поочередно на всех затравках $z_s^{(l)}, l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$ из множества $Z(G_L)$, используя алгоритм Прима, выделить остовные деревья минимального веса $T_s^{(l)} = (V_s^{(l)}, E_{T_s^{(l)}})$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$.

Шаг 3. На выходе шага 2 получается множество из $\dfrac{n^L-1}{n-1}$ ОДМВ $T_s^{(l)}=(V_s^{(l)},E_{T_s^{(l)}})$, $l=\overline{1,L}$, $s=\overline{1,n^{l-1}}$, которым и определяется ОДМВ $T=(V_L,E_T)$.

Теорема 1. *Вычислительная сложность алгоритма* α*, выделяющего ОДМВ* $T=(V_L,E_T)$ *на предфрактальном* (n,L)*-графе* $G_L=(V_L,E_L)$*, порожденного затравкой* $H=(W,Q)$*, где* $|W|=n$*,* $|V_L|=N=n^L$*, равна* $O(Nn^2)$*.*

Доказательство. Алгоритм α представляет собой, по существу, многократное выполнение шага 2. Шаг 2 потребует выполнения $O(n^2)$ операций на каждой подграф-затравке – столько операций выполняет алгоритм Прима ($O(n^2)$ – вычислительная сложность алгоритма Прима). В сумме будет выполнено $k\cdot O(n^2)$ операций, $k=\dfrac{n^L-1}{n-1}$.

Тогда, $O(k\cdot n^2)=O(\dfrac{n^L-1}{n-1}\cdot n^2)=O(n^L\cdot n^2)=O(Nn^2)$. Отсюда вычислительная сложность алгоритма α равна $O(Nn^2)$.

Примечание 1. Сравнив вычислительную сложность алгоритма Прима с вычислительной сложностью алгоритма α на предфрактальном графе G_L, получим: $O(N^2)<O(Nn^2)$. Вычислительная сложность алгоритма α меньше вычислительной сложности алгоритма Прима в n^{L-2} раз.

Теорема 2. *Алгоритм* α *выделяет ОДМВ* $T=(V_L,E_T)$ *на предфрактальном* (n,L)*-графе* $G_L=(V_L,E_L)$*, порожденном затравкой* $H=(W,Q)$*, где* $|W|=n$*.*

Доказательство. Алгоритм α на предфрактальном графе G_L выделяет множество остовных деревьев минимального веса $\{T_s^{(l)}=(V_s^{(l)},E_{T_s^{(l)}})\}$, $l=\overline{1,L}$, $s=\overline{1,n^{l-1}}$. Докажем, что множество $\{T_s^{(l)}\}$ образует ОДМВ $T=(V_L,E_T)$ предфрактального графа G_L.

Остовные деревья (ОД) $T_s^{(L)}$, $s=\overline{1,n^{L-1}}$, выделенные на подграф-затравках $z_s^{(L)}$, образуют на предфрактальном графе G_L остовный лес, состоящий из n^{L-1} связных компонент. Связные компоненты, в данном случае – это ОД, выделенные на блоках $\{B_L^{(1)}\}$.

Далее ОД $T_s^{(L-1)}$, $s=\overline{1,n^{L-2}}$, выделенные на подграф-затравках $z_s^{(L-1)}$, в соответствии с определением предфрактального графа, образуют n^{L-2} связных компонент. Точнее, каждая компонента в совокупности с ранее выделенными ребрами (ОД выделенные на блоках $\{B_L^{(1)}\}$) будет представлять собой ОД блоков $\{B_L^{(2)}\}$, а их количество равно n^{L-2}.

Строго следуя в рассуждениях проводимой линии получим, что ОД, выделенные на подграф-затравках $z_s^{(2)}$, в совокупности с найденными ранее ОД образуют n связных компонент. Каждая компонента будет представлять ОД блока $\{B_L^{(L-1)}\}$. И наконец, ОД подграф-затравки $z_1^{(1)}$ связывает n компонент покрытия предфрактального графа G_L в одну связную компоненту – остовное дерево $T=(V_L,E_T)$ предфрактального графа G_L.

С другой стороны, согласно правилу взвешивания предфрактального графа, вес всякого ребра $(l-1)$-го ранга, $l=\overline{2,L}$ меньше веса любого ребра l-го ранга. Поэтому выделение ОД минимального веса на подграф-затравках $z_s^{(L)}$ достаточно для получения ОДМВ предфрактального графа G_L, что и делает алгоритм α. Действительно, если в остовном подграфе $T=(V_L,E_T)$ какое-либо ребро меньшего ранга заменить ребром большего ранга, то полученное остовное покрытие будет “весить” больше.

Таким образом, связный остовный подграф $T=(V_L,E_T)$, полученный в результате работы алгоритма α, в силу построения им ОДМВ $T_s^{(l)}=(V_s^{(l)},E_{T_s^{(l)}})$, $l=\overline{1,L}$, $s=\overline{1,n^{l-1}}$, представляет собой ОДМВ $T=(V_L,E_T)$ предфрактального графа G_L.

Вернемся к исследуемой задаче (1) – (6). Очевидно, что для любого взвешенного графа, предфрактального графа в том числе, среди всех остовных подграфов наименьшим по весу будет остовное дерево минимального веса. Поэтому ОДМВ $T=(V_L,E_T)$, построенное на предфрактальном графе алгоритмом α, является допустимым решением $x_1=T=(V_L,E_T)\in X$, оптимизирующим критерий (5), $F_1(x_1)=\min$, ВЦФ (1) – (6).

Для остальных критериев (3) – (6) оптимальность покрытия x_1 неочевидна, и поэтому, разумно дать для некоторых из этих критериев оценки (Емеличев, Перепелица, 1989).
Критерий (6) – топологический критерий. Не теряя общности, верхнюю границу оценки значений функции $F_5(x_1)$ дадим по $\max\limits_{\{x_1\}}\max\limits_{u,v\in x_1}\rho_{x_1}(u,v)$ – наибольшей цепи среди всевозможных покрытий $\{x_1\}$.

Для всякого n-вершинного графа $G=(V,E)$ среди всех его ОД $\{T=(V,E_T)\}$, ОД с наиболее длинной (т.е. числом ребер в цепи) является гамильтонова цепь (Емеличев и др., 1990), ее длина равна $n-1$ (Емеличев и др., 1990). В свою очередь, для предфрактального графа G_L, порожденного n-вершинной затравкой H, длина его гамильтоновой цепи равна n^L-1 (Кочкаров, 1998). Таким образом, длина гамильтоновой цепи предфрактального графа с вычетом единицы (концы гамильтоновой цепи могут оказаться смежными вершинами) является верхней границей оценки, $\max\limits_{\{x_1\}} \max\limits_{u,v\in x_1} \rho_{x_1}(u,v)-1=n^L-2$, по пятому критерию ВЦФ (1) – (6).

Примечание 2. Вообще говоря, найденная верхняя граница оценки по критерию (3) для покрытия x_1 является достижимой, очевидно, на гамильтоновом (Кочкаров, 1998) предфрактальном графе, т.е. на предфрактальном графе, который имеет гамильтонов цикл. Предфрактальный граф гамильтонов, если он удовлетворяет двум следующим условиям (Кочкаров, 1998). Во-первых, затравка, которой порождается предфрактальный граф должна быть гамильтоново связной (Кочкаров, 1998); во-вторых, у самого предфрактального графа старые ребра в траектории не пересекаются (Кочкаров, 1998).

Если предфрактальный граф G_L порожден затравкой H – деревом, то он сам тоже является деревом (предфрактальным деревом). Поэтому между любой парой его вершин существует единственная цепь. Тогда алгоритм α на предфрактальном дереве G_L в качестве покрытия x_1 выделит весь предфрактальный граф G_L. В этом случае нижняя граница оценки по пятому критерию ВЦФ (1) – (6) будет равна нулю.

Ранее, при поиске верхней границы оценки по критерию $F_5(x)$ для покрытия x_1 предфрактального графа G_L, было показано, как построить гамильтонову цепь этого предфрактального графа, и при каких условиях она существует. У любого дерева $x_1=T=(V_L,E_T)$ с двумя висячими вершинами (Емеличев и др., 1990), какой является гамильтонова цепь, имеется всего лишь одна простая цепь, не содержащаяся ни в какой другой простой цепи. Тогда, если покрытие x_1 предфрактального графа G_L совпадает с его гамильтоновой цепью, то $N(x_1)=1$. Отсюда $N(x_1)\geq 1$ – нижняя достижимая граница оценки по третьему критерию (4). Проделанные рассуждения резюмирует

Лемма 1. *Если ОДМВ* $x_1=T=(V_L,E_T)$*, выделяемое алгоритмом* α *на предфрактальном* (n,L)*-графе* $G_L=(V_L,E_L)$*, совпадает с гамильтоновой цепью этого предфрактального* *графа, то покрытие* x_1 *является оптимальным одновременно по критериям* $F_1(x)$ *и* $F_3(x)$: $F_1{}^0(x_1) = \min\limits_{x \in X} F_1(x)$, $F_3{}^0(x_1) = \min\limits_{x \in X} F_3(x)$.

Для всякого дерева D число его максимальных цепей $N(D)$ определяется числом его висячих вершин, $N(D) = C_m^2 = \dfrac{m(m-1)}{2}$, где m – число висячих вершин дерева D. Среди всех деревьев наибольшее число висячих вершин имеет звезда $K_{1,n}$, число ее максимальных цепей равно $N(K_{1,n}) = C_{n-1}^2 = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$. Аналогично, число максимальных цепей $N(x_1)$ покрытия $x_1 = T = (V_L, E_T)$ предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$, порожденного n-вершинной звездой-затравкой $H = K_{1,n}$, не может быть больше, чем $N(x_1) \le n^{L-1}(n-1)$. Эта граница достижима на предфрактальном графе, порожденном звездой-затравкой, смежность старых ребер которого в траектории не нарушается. У такого предфрактального графа n^{L-1} – число подграф-затравок, а $n-1$ – число висячих вершин в каждой из них. Итак, $N(x_1) \le n^{L-1}(n-1)$ – верхняя граница оценки по критерию $F_3(x)$ для покрытия x_1.

Обобщение всех проделанных исследований по поиску оценок для критериев из ВЦФ (1) – (5), не оптимизируемых покрытием, выделяемым алгоритмом α, лежит в основе доказательства следующей теоремы.

Теорема 3. *Алгоритм* α *выделяет покрытие* $x_1 = T = (V_L, E_T)$ *на предфрактальном* (n, L)*-графе* $G_L = (V_L, E_L)$, *порожденном* n*-вершинной затравкой* $H = (W, Q)$, *оптимальное по первому критерию* $F_1{}^0(x_1) = \min\limits_{x \in X} F_1(x)$, *и оцениваемое по двум следующим,* $F_3(x_1) \in [1, n^{L-1}(n-1)]$, *и* $F_5(x_1) \in [0, n^L - 2]$.

Литература

Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. – Ижевск: НИЦ "РХД", 2001.

Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990.

Емеличев В.А., Перепелица В.А. О некоторых алгоритмических проблемах многокритериальной оптимизации на графах // Журнал вычил. матем. и матем. физ. 1989, № 2. С. 171 – 183.
Кочкаров А.М. Алгоритмические вопросы теории фрактальных графов. // Диссертация на соискание ученой степени д.ф.-м.н. – Черкесск: КЧТИ, 1998.
Кочкаров А.М. Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход. – Нижний Архыз. Препринт САО №133, 1998.
Павлов Д.А. Многокритериальная задача покрытия фрактальных и предфрактальных графов простыми цепями. Черкесск, 2004г. Деп. в ВИНИТИ, №1248-В2004, С.1-12.

Бесплатно

Д.А.Павлов, А.А.Кочкаров

ОБ ОДНОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ПОКРЫТИЯ МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА ПРЕДФРАКТАЛЬНОГО ГРАФА ПРОСТЫМИ ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ЦЕПЯМИ

Работа поступила в печать 9 сентября 2004 г.

Заказ №158 с Уч.изд.л.-1.4 Тираж 25

Специальная астрофизическая обсерватория РАН