Р О С С И Й С К А Я   А К А Д Е М И Я   Н А У К
СПЕЦИАЛЬНАЯ АСТРОФИЗИЧЕСКАЯ ОБСЕРВАТОРИЯ

П Р Е П Р И Н Т   N 201

А. А. Узденов, Д. А. Павлов

АЛГОРИТМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АБСОЛЮТНЫХ *P*-ЦЕНТРОВ НА ПРЕДФРАКТАЛЬНЫХ ГРАФАХ С ЗАТРАВКОЙ – ПОЛНЫМ *n*-ВЕРШИННЫМ ГРАФОМ

Нижний Архыз
2004

УДК 519.1

АЛГОРИТМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АБСОЛЮТНЫХ P-ЦЕНТРОВ НА ПРЕДФРАКТАЛЬНЫХ ГРАФАХ С ЗАТРАВКОЙ – ПОЛНЫМ n-ВЕРШИННЫМ ГРАФОМ

А.А.Узденов, Д.А. Павлов

Карачаево-Черкесская государственная технологическая академия,
г. Черкесск, Карачаево-Черкесия, Россия, 369000

Аннотация. В настоящей работе определен p_i^l-центр предфрактального (n,L)-графа $G_l=(V_l,E_l)$ с затравкой – полным n-вершинным графом. Для нахождения p_i^l-центров предложены два алгоритма решения задачи об абсолютных p_i^l-центрах.
Ключевые слова: p_i^l-центр, полный n-вершинный граф.

ALGORITHMS OF DEFINITION OF ABSOLUTE P-CENTERS ON PREFRACTAL GRAPHS WITH COMPLETE n-VERTEX GRAPH AS A SEEDING AGENT

A.A.Uzdenov, D.A. Pavlov

Abstract. In the present paper a p_i^l-center of the prefractal (n,L)-graph $G_l=(V_l,E_l)$ with complete n-vertex graph as a seeding agent was found. For the p_i^l-center to be found two algorithms of the solution of a problem about absolute p_i^l-centers are offered.
Keywords: p_i^l-center, complete n-vertex graph.

1. p-центры. Некоторые определения

В данной работе рассматривается известная задача о p-центрах (Кристофидес, 1978) в новой постановке на предфрактальных и фрактальных графах. Используем общепринятое обозначение $G=(V,E)$ для всякого конечного или бесконечного графа (Кристофидес, 1978; Оре, 1968; Берж, 1962; Емеличев и др., 1990). Термином "затравка" (Кочкаров, 1998; Кочкаров, Перепелица, 1999) условимся называть связный n-вершинный граф $H=(W,Q)$ с ребрами, взвешенными двумя числами $a_{ij}^l \in [a,b]$ и $b_{ij}^l \in [c,d]$, $i,j=(\overline{1,n})$. Рёбра e_{ij}, $e_{ij} \in E$ взвесим следующим образом. Рёбра e_{ij} первого ранга имеют веса $a_{ij} \in [a,b]$ и $b_{ij} \in [a,b]$; рёбра e_{ij}^2 второго ранга имеют веса $a_{ij}{}^2 \in [a,b]$ и $b_{ij}{}^2 \in [a,b]$, равные соответствующим весам рёбер первого ранга, умноженным на коэффициент масштабирования k (Емеличев и др., 1990), где $k < \frac{a}{b}$; рёбра e_{ij}^3 третьего ранга имеют веса $a_{ij}{}^3 \in [a,b]$ и $b_{ij}{}^3 \in [a,b]$, равные соответствующим весам рёбер второго ранга, умноженным на k и так далее. Недостающие определения графов можно найти в работах Кристофидеса (1978), Оре (1968), Бержа (1962), Емеличева и др. (1990), а недостающие определения предфрактальных и фрактальных графов можно найти в работах Кочкарова (1998); Кочкарова, Перепелицы (1996, 1999).

Пусть Χ – подмножество (содержащее p вершин) множества V_l вершин предфрактального (n,L)-графа $G_l=(V_l,E_l)$. Через $d(\mathrm{X},x_i)$ будем обозначать наикратчайшее из расстояний между вершинами множества Χ и вершиной x_i, т.е. $d(\mathrm{X},x_i)=\min\limits_{x_j\in \mathrm{X}}\left[d(x_j,x_i)\right]$. Пусть $s(\mathrm{X})=\max\limits_{x_j\in \mathrm{X}}\left[d(\mathrm{X},x_j)\right]$ – число разделения множества Χ. Множество X, для которого $s(X)=\min\limits_{\mathrm{X}\subseteq V_l}\left[s(\mathrm{X})\right]$, называется p-центром предфрактального (n,L)-графа $G_l=(V_l,E_l)$. На множестве X определим критерии

$$F_1(x)=\left[s(X)\right]\to \min,$$

$$F_2(x)=\sum_{p_i^l\in X} a_{ij}^l \to \min,$$

$$F_3(x)=\sum_{p_i^l\in X} b_{ij}^l \to \min,$$

$$F_4(x)=\left|X\right| \to \min,$$

где $F_1(x)$ – p_i^l-центр, $F_2(x)$, $F_3(x)$ – суммарный минимальный вес рёбер, участвующих в p-центрах, $F_4(x)$ – мощность множества X.

Для решения этой задачи предложены полиномиальные алгоритмы α_1 и α_2 с оценками.

2. Алгоритмы α_1 и α_2 определения абсолютных p-центров

Рассмотрим по очереди каждую вершину w_i, $w_i \in W$ затравки $H=(W,Q)$ и "углубимся" по всем возможным маршрутам, выходящим из нее, на расстояние

$\delta_i = \dfrac{\lambda}{m_i}$, где λ — заданная константа, которую мы будем называть константой "проникновения".

Пусть $Q_\lambda(w_i)$ — множество всех точек x на затравке H, из которых вершина w_i, достижима в пределах расстояния δ_i при заданном значении λ (Кристофидес, 1978)

$$Q_\lambda(w_i) = \{x | m_i d(y, w_i) \le \lambda, x - \textit{точка затравки} \quad H\}.$$

Определим множество Χ как множество таких точек x на затравке H, что из каждой точки x достижимо в пределах расстояния δ_i, (при заданном λ) одно и то же множество вершин затравки H. Область может быть, например, частью ребра или может содержать только одну точку.

2.1. Алгоритм α_1

Вначале алгоритм α_1 определяет абсолютный p-центр затравок $H = (W, Q)$ на l-ранге. Построение абсолютного p-центра затравки $H = (W, Q)$ на l-ранге при заданном p (Кристофидес, 1978) выглядит следующим образом.

Рассмотрим затравку.

Шаг 1. Положить $\lambda = 0$.

Шаг 2. Увеличить λ на небольшую величину $\Delta\lambda$.

Шаг 3. Построить множества $Q_\lambda^l(w_i^l)$ для всех w_i^l, $w_i^l \in W_n$ и найти множество Χ

$$Q_\lambda^l(w_i^l) = \{x^l | m_i^l d(x^l, w_i^l) \le \lambda, x^l \in H\}.$$

В общем случае множество Χ можно следующим образом построить из достижимых множеств $Q_\lambda(w_i)$. Области, из которых не достижимы никакие вершины[1], описываются соотношением

$$\mathrm{X}^l = \{x | x \in H\} - \bigcup_i Q_\lambda^l(w_i^l),$$

где второй член исключает все области затравки *H*, из которых можно достигнуть[1] хотя бы одну вершину w_i^l. Области, из которых можно достигнуть[1] ровно t вершин $w_{i_1}^l, w_{i_2}^l, w_{i_3}^l, \ldots, w_{i_t}^l$ (для любого $t = 1,2,3,\ldots,n$), определяются следующим выражением:

$$\mathrm{X}^l(w_{i_1}^l, w_{i_2}^l, w_{i_3}^l, \ldots, w_{i_t}^l) = \bigcap_{q=(1,t)} Q_\lambda^l(w_i^l) - \left\{\left[\bigcap_{q-(1,t)} Q_\lambda^l(w_i^l)\right] \bigcap \left[\bigcup_{q-(t+1,s)} Q_\lambda^l(w_i^l)\right]\right\},$$

где второй член исключает такие области, из которых достижимы[1] вершины $w_{i_1}^l, w_{i_2}^l, \ldots, w_{i_t}^l$ и еще хотя бы одна из оставшихся вершин затравки.

Шаг 4. Образовать двудольную затравку $H' = (W' \bigcup W, Q')$, где W' — множество вершин, каждая из которых соответствует некоторой области P_p и Q' — множество рёбер, такое, что ребро между областью-вершиной и вершиной w_i существует тогда и только тогда, когда w_i может быть достигнута из этой области.

Шаг 5. Найти наименьшее доминирующее множество затравки $H' = (W' \bigcup W, Q')$.

---

[1] Достижимость берется "в пределах заданного расстояния δ_i".

Шаг 6. Если число областей в приведенном выше множестве больше, чем p, то вернуться к шагу 2; в противном случае остановиться. Области этого множества образуют абсолютный p-центр исходной затравки H.

На этой затравке получим оптимальный абсолютный p-центр (Кристофидес, 1978). На всех остальных затравках данного ранга поиск абсолютного p-центра аналогичен. Когда найдём абсолютные p-центры на всех затравках, получим абсолютный p-центр l-го ранга, т.е. абсолютный p_i^l-центр.

Стянем затравки l-го ранга в вершины (Кочкаров, 1998), т.е. заменим вершины затравки одной вершиной w_i^{l-1} и все рёбра, инцидентные вершинам затравки, будут инцидентны вершине w_i^{l-1}, и получим предфрактальный $(n, l\text{-}1)$-граф. Поиск абсолютного p-центра для предфрактального $(n, l\text{-}1)$-графа аналогичен. Получим абсолютный p-центр $(l-1)$-го ранга, т.е. абсолютный p_i^{l-1}-центр. Продолжим процесс до l=1 и получим предфрактальныий $(n,1)$-граф с абсолютным p_i^1-центром. Этот p_i^1-центр является абсолютным p-центром для всего фрактального графа.

2.2. *Алгоритм* α_2

Вначале алгоритм α_3 определяет абсолютный p-центр затравок $H=(W,Q)$ на l-ранге. Построение абсолютного p-центра затравки $H=(W,Q)$ на l-ранге при заданном p (Кристофидес, 1978) выглядит следующим образом.

Шаг 1. Положить $\lambda = 0$.

Шаг 2. Увеличить λ на небольшую величину $\Delta\lambda$.

Шаг 3. Построить множества $Q_\lambda^l(w_i^l)$ для всех w_i^l, $w_i^l \in W_n$ и найти множество Χ
$Q_\lambda^l(w_i^l) = \left\{x^l \middle| m_i^l d(x^l, w_i^l) \le \lambda, x^l \in H\right\}$.

В общем случае множество Χ можно следующим образом построить из достижимых множеств $Q_\lambda(w_i)$. Области, из которых не достижимы никакие вершины[1], описываются соотношением

$$\mathrm{X}^l = \{x | x \in H\} - \bigcup_i Q_\lambda^l(w_i^l),$$

где второй член исключает все области затравки *H*, из которых можно достигнуть хотя бы одну вершину w_i^l. Области, из которых можно достигнуть ровно t вершин $w_{i_1}^l, w_{i_2}^l, w_{i_3}^l, ..., w_{i_t}^l$ (для любого $t = 1,2,3,...,n$), определяются следующим выражением:

$$\mathrm{X}^l(w_{i_1}^l, w_{i_2}^l, w_{i_3}^l, ..., w_{i_t}^l) = \bigcap_{q=(1,t)} Q_\lambda^l(w_i^l) - \left\{\left[\bigcap_{q-(1,t)} Q_\lambda^l(w_i^l)\right] \bigcap \left[\bigcup_{q-(t+1,s)} Q_\lambda^l(w_i^l)\right]\right\},$$

где второй член исключает такие области, из которых достижимы вершины $w_{i_1}^l, w_{i_2}^l, ..., w_{i_t}^l$ и еще хотя бы одна из оставшихся вершин затравки.

Шаг 4. Образовать двудольную затравку $H' = (W' \bigcup W, Q')$, где W' — множество вершин, каждая из которых соответствует некоторой области P_p и Q' — множе-

ство рёбер, такое, что ребро между областью-вершиной и вершиной w_i существует тогда и только тогда, когда w_i может быть достигнута из этой области.
Шаг 5. Найти наименьшее доминирующее множество затравки $H' = (W' \bigcup W, Q')$.
Шаг 6. Если число областей в приведенном выше множестве больше, чем p, то вернуться к шагу 2; в противном случае остановиться. Области этого множества образуют абсолютный p-центр исходной затравки H.

На всех остальных затравках данного ранга поиск абсолютного p-центра аналогичен. Когда найдём абсолютные p-центры на всех затравках, получим абсолютный p-центр l-го ранга, т.е. абсолютный p_i^l-центр.

Стянем затравки l-го ранга в вершины (Кочкаров, 1998), т.е. заменим вершины затравки одной вершиной w_i^{l-1} и все рёбра, инцидентные вершинам затравки, будут инцидентны вершине w_i^{l-1}, тогда получим предфрактальный $(n, l\text{-}1)$-граф. Поиск абсолютного p-центра для предфрактального $(n, l\text{-}1)$-графа аналогичен. Получим абсолютный p-центр $(l-1)$-го ранга, т.е. абсолютный p_i^{l-1}-центр.

Продолжим процесс до l=1 и получим предфрактальныий $(n,1)$-граф с абсолютным p_i^1-центром. Этот p_i^1-центр является абсолютным p-центром для всего фрактального графа.

Обоснованием данных алгоритмов являются следующие теоремы.

Теорема 1. Алгоритм α_1 выделяет абсолютный p_i^l-центр, $i=\overline{1,s}$, на предфрактальном (n, l)-графе $G_l = (V_l, E_l)$, $l = (\overline{1,L})$, где $k < \frac{a}{b}$ (Емеличев и др., 1990), оптимальный по $F_1(x)$ с оценками $F_2(x) \le \frac{n^{L-1} \cdot k^{L-1} \cdot b}{2}$, $F_4(x) \le p$. Причём трудоёмкость (Гэри, Джонсон, 1982) алгоритма α_1 равна $\tau(\alpha_1) = O(N \cdot n^2)$, где $N = |V|$.

Доказательство. Алгоритм α_1 потребует выполнения $O(n^2)$ операций на каждой затравке. Тогда $\tau(\alpha_1) = O(\frac{n^L - 1}{n-1} \cdot n^2) = O(N \cdot n^2)$. В силу коэффициента $k < \frac{a}{b}$ в процессе своей работы алгоритм α_1 просматривает рёбра $e_{ij} \in E_l$ в порядке возрастания их ранга, причём не переходит к следующему рангу до тех пор, пока не будут просмотрены все рёбра текущего ранга. В силу этого правила исключается избыточное присутствие рёбер старшего ранга. Поэтому α_1 выделяет на предфрактальном (n, l)-графе $G_l = (V_l, E_l)$, $l = (\overline{1,L})$, p_l-медиану, оптимальную по критерию $F_1(x)$. Так как в выделении p-центра участвуют $\frac{n^{L-1}}{2}$ рёбер, то суммарный минимальный вес рёбер, участвующих в p-центре, не превосходит $\frac{n^{L-1} \cdot k^{L-1} \cdot b}{2}$. Естественно, верхней оценкой критерия $F_4(x)$ будет p.

Теорема доказана.

Теорема 2. Алгоритм α_2 выделяет абсолютный p_i^l-центр, $i=\overline{1,s}$, на предфрактальном (n, l)-графе $G_l=(V_l,E_l)$, $l=(\overline{1,L})$, где $k<\dfrac{a}{b}$ (Емеличев и др., 1990), оптимальный по $F_1(x)$ с оценками $F_3(x)\le\dfrac{n^{L-1}\cdot k^{L-1}\cdot d}{2}$, $F_4(x)\le p$. Причём трудоёмкость (Гэри, Джонсон, 1982) алгоритма α_2 равна $\tau(\alpha_2)=O(N^2)$, где $N=|V|$.

Доказательство. Алгоритм α_2 потребует выполнения $O(n^2)$ операций на каждой затравке. Тогда $\tau(\alpha_1)=O(\dfrac{n^L-1}{n-1}\cdot n^2)=O(N\cdot n^2)$. В силу коэффициента $k<\dfrac{a}{b}$ в процессе своей работы алгоритм α_2 просматривает рёбра $e_{ij}\in E_l$ в порядке возрастания их ранга, причём не переходит к следующему рангу до тех пор, пока не будут просмотрены все рёбра текущего ранга. В силу этого правила исключается избыточное присутствие рёбер старшего ранга. Поэтому α_2 выделяет на предфрактальном (n, l)-графе $G_l=(V_l,E_l)$, $l=(\overline{1,L})$, p_l-медиану, оптимальную по критерию $F_1(x)$. Так как в выделении p-центра участвует $\dfrac{n^{L-1}}{2}$ рёбер, то суммарный минимальный вес рёбер, участвующих в p-центре, не превосходит $\dfrac{n^{L-1}\cdot k^{L-1}\cdot b}{2}$. Естественно, верхней оценкой критерия $F_4(x)$ будет p.

Теорема доказана.

Теорема 3. p_i^l-центр предфрактального (n,L)-графа $G_l=(V_l,E_l)$ равен $p_i^l=\left\{\text{v}_{i,\eta}^l \middle| m_i d(\text{v}_{i,\eta}^l,v_{i,\eta}^l)\le 2^{L-1}\cdot k^{L-1}\right\}$, $l=(\overline{1,L})$, $i=(\overline{1,n})$, η- номер затравки, если затравка – полный n-вершинный граф.

Доказательство. Пусть дан взвешенный предфрактальный (n,L)-граф $G_l=(V_l,E_l)$ с затравкой – полный *n*-вершинный граф. Коэффициент масштабирования $k<1$. Причём веса рёбер *l*-го ранга равны соответствующим весам ребер $(l-1)$-го ранга, умноженным на коэффициент масштабирования *k*, где $l=1,2,3,...L$. Рассмотрим два случая: 1) когда старые рёбра не пересекаются; 2) старые рёбра пересекаются.

Пусть старые рёбра не пересекаются, тогда на каждом ранге получим следующие оценки p_i^l-центра.

На первом ранге p_i^1-центром является $p_i^1=\left\{\text{v}_{i,\eta}^1 \middle| m_i d(\text{v}_{i,\eta}^1,v_{i,\eta}^1)\le 2^0\cdot k^0\right\}$, $i=(\overline{1,n})$, η – номер затравки. На втором ранге p_i^2-центром является $p_i^2=\left\{\text{v}_{i,\eta}^2 \middle| m_i d(\text{v}_{i,\eta}^2,v_{i,\eta}^2)\le 2^1\cdot k^1\right\}$, $i=(\overline{1,n})$, η – номер затравки. На третьем ранге p_i^3-центром является $p_i^3=\left\{\text{v}_{i,\eta}^3 \middle| m_i d(\text{v}_{i,\eta}^3,v_{i,\eta}^3)\le 4=2^2\cdot k^2\right\}$, $i=(\overline{1,n})$, η – номер затравки. На четвёртом ранге p_i^4-центром является $p_i^4=\left\{\text{v}_{i,\eta}^4 \middle| m_i d(\text{v}_{i,\eta}^4,v_{i,\eta}^4)\le 8=2^4\cdot k^4\right\}$, $i=(\overline{1,n})$, η – номер затравки. Предположим, что на ранге $l=L-1$ p_i^{L-1}-центром является:

$$p_i^{L-1}=\left\{\text{v}_{i,\eta}^{L-1} \middle| m_i d(\text{v}_{i,\eta}^{L-1},v_{i,\eta}^{L-1})\le 2^{L-2}\cdot k^{L-2}\right\},\ l=(\overline{1,L}),\ i=(\overline{1,n}),\ \eta \text{ – номер затравки.}$$

Тогда получим, что на ранге $l = L$ p_i^L - центром является:

$$p_i^L = \left\{ \mathrm{v}_{i,\eta}^L \middle| m_i d(\mathrm{v}_{i,\eta}^L, v_{i,\eta}^L) \le 2^{L-1} \cdot k^{L-1} \right\},\ l = (\overline{1,L}),\ i = (\overline{1,n}),\ \eta \text{ – номер затравки.} \quad (1)$$

Формула (1) является верхней оценкой для p_i^L-центра предфрактального (n, L)-графа $G_l = (V_l, E_l)$.

Пусть старые рёбра пересекаются, тогда на каждом ранге получим следующие оценки p_i^l-центра.

На первом ранге p_i^1-центром является $p_i^1 = \left\{ \mathrm{v}_{i,\eta}^1 \middle| m_i d(\mathrm{v}_{i,\eta}^1, v_{i,\eta}^1) \le 2^0 \cdot k^0 \right\}$, $i = (\overline{1,n})$, η- номер затравки. На втором ранге p_i^2-центром является $p_i^2 = \left\{ \mathrm{v}_{i,\eta}^2 \middle| m_i d(\mathrm{v}_{i,\eta}^2, v_{i,\eta}^2) \le 2^1 \cdot k^1 \right\}$, $i = (\overline{1,n})$, η- номер затравки. На третьем ранге p_i^3-центром является $p_i^3 = \left\{ \mathrm{v}_{i,\eta}^3 \middle| m_i d(\mathrm{v}_{i,\eta}^3, v_{i,\eta}^3) \le 4 = 2^2 \cdot k^2 \right\}$, $i = (\overline{1,n})$, η- номер затравки. На четвёртом ранге p_i^4-центром является $p_i^4 = \left\{ \mathrm{v}_{i,\eta}^4 \middle| m_i d(\mathrm{v}_{i,\eta}^4, v_{i,\eta}^4) \le 8 = 2^4 \cdot k^4 \right\}$, $i = (\overline{1,n})$, η– номер затравки. Предположим, что на ранге $l = L - 1$ p_i^{L-1}-центром является:

$$p_i^{L-1} = \left\{ \mathrm{v}_{i,\eta}^{L-1} \middle| m_i d(\mathrm{v}_{i,\eta}^{L-1}, v_{i,\eta}^{L-1}) \le 2^{L-2} \cdot k^{L-2} \right\},\ l = (\overline{1,L}),\ i = (\overline{1,n}),\ \eta \text{ – номер затравки.}$$

Тогда получим, что на ранге $l = L$ p_i^L-центр равен:

$$p_i^L = \left\{ \mathrm{v}_{i,\eta}^L \middle| m_i d(\mathrm{v}_{i,\eta}^L, v_{i,\eta}^L) \le 2^{L-1} \cdot k^{L-1} \right\},\ l = (\overline{1,L}),\ i = (\overline{1,n}),\ \eta \text{ – номер затравки.} \quad (2)$$

Формула (2) является нижней оценкой p_i^L- центра для предфрактального (n, L)-графа $G_l = (V_l, E_l)$.

Литература

Берж К. Теория графов и ее применения. – М.: Изд. иностр. лит-ры, 1962

Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982

Емеличев В.А. и др. Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990

Кочкаров А.М. Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход. Нижний Архыз, 1998

Кочкаров А.М., Перепелица В.А. Метрические характеристики фрактального и предфрактального графа. Сб. РАН САО.-1999

Кочкаров А.М., Перепелица В.А. О гамильтоновости фрактальных графов. Международная конференция “Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики”. Тез. докл. Нальчик НИИ ПМиА КБНЦ. РАН, 1996. с. 52-53

Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978

Оре О. Теория графов. - М.: Наука, 1968

Бесплатно

А.А.Узденов, Д.А.Павлов

АЛГОРИТМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АБСОЛЮТНЫХ P-ЦЕНТРОВ НА ПРЕДФРАКТАЛЬНЫХ ГРАФАХ С ЗАТРАВКОЙ – ПОЛНЫМ n-ВЕРШИННЫМ ГРАФОМ

Работа поступила в печать
11 октября 2004 г.

Заказ № 159с Уч.изд.л.-1.3 Тираж 25
Специальная астрофизическая обсерватория РАН