

УДК 523.4-76:520.82-14

ВЛИЯНИЕ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ШУМОВ SPITZER/IRAC НА ВТОРИЧНЫЕ ЗАТМЕНИЯ ЭКЗОПЛАНЕТЫ HD 209458 b

© 2026 А. А. Федотов^{1*}, Р. В. Балувев^{1,2**}¹Специальная астрофизическая обсерватория Российской академии наук, Нижний Архыз, 369167 Россия²Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 199034 Россия

Поступила в редакцию 15 августа 2025 года; после доработки 11 февраля 2026 года; принята к публикации 21 апреля 2026 года

В статье проанализированы кривые инфракрасного блеска для 13 вторичных затмений экзопланеты HD 209458 b, полученные с помощью Spitzer/IRAC в канале 3.6 мкм. Помимо хорошо известного эффекта внутрипиксельных изменений чувствительности, вызывающих квазипериодический шум, в данных обнаружен также красный шум, состоящий из двух подкомпонентов с разным временным интервалом корреляции: 10–20 секунд и 5–10 минут. Показано, что можно построить глобальную модель эффекта внутрипиксельной чувствительности, которая аппроксимирует все 13 кривых блеска одновременно, используя небольшое число параметров (например, 12). Кроме того, выполнен замер систематического сдвига во времени вторичного затмения экзопланеты, который, по видимому, значимо не отличается от нуля и составляет -4 ± 40 с. Это соответствует пространственному сдвигу в 0.007 ± 0.060 единиц радиуса планеты или эксцентриситету орбиты $e \cos \omega$, равному $(-0.2 \pm 2.1) \times 10^{-4}$.

Ключевые слова: инфракрасная область: планетарные системы — технические средства: фотометрические — методы: анализ данных — отдельные: HD 209458

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия изучение экзопланет стало быстро развивающейся областью астрономии. Если поначалу основное внимание уделялось открытию новых объектов, то современные исследования все больше сосредоточены на их физических характеристиках. Наблюдения транзитов экзопланет могут быть весьма информативными: помимо оценки плотности и массы планеты (Winn, 2010), они позволяют изучать свойства ее атмосферы. Так, с помощью транзитной спектроскопии можно определить химический состав планеты и профиль ее атмосферы (Seager and Deming, 2010). Анализируя фазовые кривые экзопланет в ИК-спектре, мы также можем получить представление о глобальной структуре их атмосфер. Например, Knutson et al. (2007) провели такое исследование для экзопланеты HD 189733 b.

В дополнение к наблюдениям прохождений все большее внимание уделяется изучению вторичных затмений экзопланет. Затмения дают возможность собирать или уточнять информацию об эксцентриситете орбиты и дневной температуре планеты. Наблюдения начальной и заключительной стадий

затмения, когда планета скрыта лишь частично, позволяют составить карту распределения яркости и температуры на дневной стороне планеты. Горячие юпитеры, вероятно, являются наилучшими кандидатами для подобных исследований, поскольку благодаря своей высокой температуре и большому размеру они испускают значительное собственное излучение в ИК-диапазоне. Хорошим примером служит экзопланета HD 189733 b, на поверхности которой было обнаружено горячее пятно (de Wit et al., 2012; Majeau et al., 2012). Смещение такого пятна относительно подзвездного меридиана приводит к кажущемуся смещению вторичного затмения относительно его динамического эфемеридного момента. На более тонком уровне горячее пятно должно проявляться в виде определенных отклонений в кривой ИК-излучения при вторичном затмении (Rauscher and Menou, 2013).

В этой статье мы используем данные вторичных затмений, полученные камерой Infrared Array Camera (IRAC) космического телескопа Spitzer. Благодаря IRAC был накоплен значительный массив данных (например, Knutson et al., 2007; Agol et al., 2010; Majeau et al., 2012; de Wit et al., 2012; Evans et al., 2015). Мы сосредоточились именно на экзопланете HD 209458 b, поскольку для нее имеется большое количество общедоступных на-

*E-mail: andry.201452@gmail.com

**E-mail: r.baluev@spbu.ru

блюдений IRAC. Для этого объекта Valuev et al. (2019) провели совместный анализ переменности моментов прохождений (TTV) и лучевых скоростей (RV) и не выявили признаков дополнительных невидимых спутников в системе. Согласно Bonomo et al. (2017), эксцентриситет орбиты HD 209458 b значимо не отличается от нуля; это означает, что вторичные затмения происходят строго в средних точках между последовательными прохождением. Для этой экзопланеты нам неизвестны какие-либо положительные результаты по поиску неоднородно яркого диска (например, горячего пятна, подобного тому, что наблюдается у HD 189733 b). Очевидно, что если горячее пятно на HD 209458 b существует, то оно должно быть менее выражено на кривой блеска вторичного затмения, чем у HD 189733 b. Следовательно, оно будет проявляться только через систематическое отклонение всех затмений от прогнозируемого времени. Наблюдательное обнаружение такого смещения может указывать либо на наличие горячего пятна, либо на ненулевой эксцентриситет орбиты. Обе интерпретации представляют для нас интерес, поскольку ненулевой эксцентриситет для горячего юпитера в системе без других возмущающих тел остается загадкой.

В основном наше исследование было мотивировано поиском подобного потенциального временного сдвига вторичного затмения, который мог бы указывать на наличие горячего пятна на HD 209458 b. Еще одной целью стало детальное изучение структуры шума в данных Spitzer/IRAC, включая систематические эффекты и компоненты небелого шума. Несмотря на то что этот вопрос уже довольно хорошо проработан, в частности, в отношении эффекта переменной чувствительности внутри пикселей (Désert et al., 2009; Evans et al., 2015), в конечном итоге мы стремились построить исчерпывающую модель шума IRAC, которая не оставляла бы статистически значимых остаточных невязок или небелых компонентов. Без такого систематического анализа любой положительный или отрицательный результат, касающийся нашей основной задачи (определения временного сдвига вторичного затмения), будет недостаточно надежным.

Статья разделена на три основных раздела. В разделе 2 описываются наблюдения, отобранные для анализа, их предварительная обработка (например, удаление выбросов) и известные источники систематических ошибок. В разделе 3 представлены модели, использованные для построения инфракрасных кривых блеска вторичных затмений и их шумов, а также обработка последних. В разделе 4 обсуждаются результаты.

2. НАБЛЮДЕНИЯ SPITZER/IRAC ВТОРИЧНЫХ ЗАТМЕНИЙ ДЛЯ HD 209458 B

2.1. Необработанные ИК-данные, имеющиеся для HD 209458 b

По результатам наблюдений IRAC для HD 209458 b доступны кривые блеска 28 вторичных затмений¹⁾: 14 наблюдались в полосе 3.6 мкм, 10 — в полосе 4.5 мкм, одно — в полосе 5.4 мкм и три — в полосе 8 мкм. Поскольку разные спектральные диапазоны содержат собственные типы систематических ошибок и шума, мы ограничились одним из них. В нашем исследовании рассматривалась только полоса 3.6 мкм — именно на нее приходится наибольшее количество наблюдений. Для анализа мы отобрали данные в пределах ± 4 часов от среднего момента вторичного затмения, предсказанного по работе Bonomo et al. (2017).

Подробная информация о программах, по которым проводились эти наблюдения, представлена в таблице 1. В ней содержатся только $N_{SE} = 13$ вторичных затмений вместо 14, поскольку мы не включили данные из программы Charbonneau et al. (2005) из-за их повышенного шума, связанного, по-видимому, с необычной схемой съемки кадров с чередующимися полосами. Стоит отметить, что наш набор наблюдений частично совпадает с тем, который использовали Evans et al. (2015).

Ниже приводится более подробное объяснение таблицы 1, в частности информация о выбросах.

2.2. Схема обработки данных

Вся последовательность обработки включала следующие этапы:

- 1) предварительная обработка данных (применяется IRAC-конвейер уровня 1);
- 2) апертурная фотометрия;
- 3) первый прогон предварительного анализа из раздела 3.4;
- 4) удаление выбросов и повторный прогон предварительного анализа;
- 5) первый прогон окончательного анализа из раздела 3.5;
- 6) удаление выбросов и повторный прогон окончательного анализа.

Шаги 1, 2, 4 и 6 больше связаны с подготовкой данных, чем с их фактической обработкой, поэтому они описаны ниже в данном разделе. Шаги 3 и 5 отражают суть нашего анализа и изложены в разделе 3.

¹⁾Смотреть <https://irsa.ipac.caltech.edu/applications/Spitzer/SHA/>

Таблица 1. Используемые в работе данные IRAC для HD 209458. В столбцах: (1) идентификатор программы; (2) ссылка; (3) дата; (4) количество кадров; (5) и (6) количество и доля выброшенных кадров; (7) количество групп точек без выбросов (N_{bin}); (8) доля групп точек, в которых оказались выбросы

Программа	Ссылка	Дата	N	Выбросы		N_{bin}	Выбросы $_{\text{bin}}$, %
				(5)	(6)		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
60021	Knutson et al. (2008a)	2011.01.12	223936	131	0.058%	3465	1.0
		2011.01.16	223936	48	0.021%	3461	1.1
		2014.02.13	196608	85	0.043%	3042	1.0
		2014.02.17	205568	38	0.018%	3175	1.2
90186	Todorov et al. (2012)	2013.08.28	230656	91	0.039%	3572	0.9
10103	Lewis et al. (2013)	2014.01.19	175872	29	0.016%	2723	0.9
		2014.02.06	175872	172	0.098%	2719	1.1
		2014.02.27	175872	22	0.013%	2726	0.8
		2014.08.22	175872	28	0.016%	2723	0.9
		2014.08.29	175872	28	0.016%	2721	1.0
		2014.09.06	166592	31	0.019%	2573	1.2
		2015.01.25	175872	27	0.015%	2721	1.0
		2015.01.28	175872	327	0.186%	2710	1.4

2.2.1. Предварительная обработка

Все наблюдения IRAC, использованные в этой работе, были выполнены в так называемом subarray-режиме, который оптимален при наблюдении ярких источников и позволяет получать высокое временное разрешение. Subarray-изображение представляет собой небольшой квадрат размером 32×32 пикселя. Поток данных от детектора IRAC состоит из блоков, содержащих 64 последовательных subarray-изображения, объединенных в одно изображение размером 256×256 . IRAC-конвейер уровня 1 (BCD, Basic Calibrated Data) преобразует эти блоки данных в 3D-куб, состоящий из 64 2D-кадров в виде слоев. Этот конвейер также выполняет калибровку потока и удаляет некоторые хорошо известные инструментальные ошибки. Значения потока в BCD-кадре являются абсолютными и выражены в МЯн sr^{-1} .

2.2.2. Апертурная фотометрия

Мы начали работу с BCD-кадров и обрабатывали их с помощью собственного конвейера Python, пакетов astropy (Robitaille et al., 2013) и photutils (Bradley et al., 2019), после чего применили метод апертурной фотометрии. На первом этапе определялось положение центроида яркости звезды путем вычисления взвешенного по потоку среднего значения в квадрате размером 8×8 пикселей в центре кадра. Затем для каждого кадра мы суммировали значения пикселей в пределах круга радиусом

4 пикселя. Фон оценивался по медиане пикселей за пределами 12-пиксельного радиуса. Далее эта оценка была увеличена с учетом площади основной апертуры и вычтена из результата фотометрии. В качестве временной шкалы в обработанных данных использовалось барицентрическое динамическое время (TDB).

Стоит отметить, что на кадре № 58 каждого 64-слойного куба данных BCD присутствует фоновый шум, отличающийся от остальных кадров. Мы не удаляли эти кадры, потому что при дальнейшей обработке бинировали все 64 слоя из одного BCD. Благодаря этому незначительно аномальные 58-е кадры не должны вызывать систематической переменности в бинированных данных. Кроме того, бинирование потребовалось для сокращения объема данных и снижения вычислительных затрат при последующем анализе.

2.2.3. Удаление выбросов

В полученном наборе BCD-кадров имелось много выбросов. Мы определяли такие кадры на основе трех величин: невязок потока и двух координат центроида яркости. Затем к ним применялась методика выявления выбросов, предложенная Valuev et al. (2015). Для каждого вторичного затмения стандартизировали упомянутые величины — сдвинули и масштабировали их так, чтобы они имели нулевое среднее и единичную дисперсию. Далее анализировали так называемые Q-Q (квантиль-квантильные) графики. С их помощью выбросы

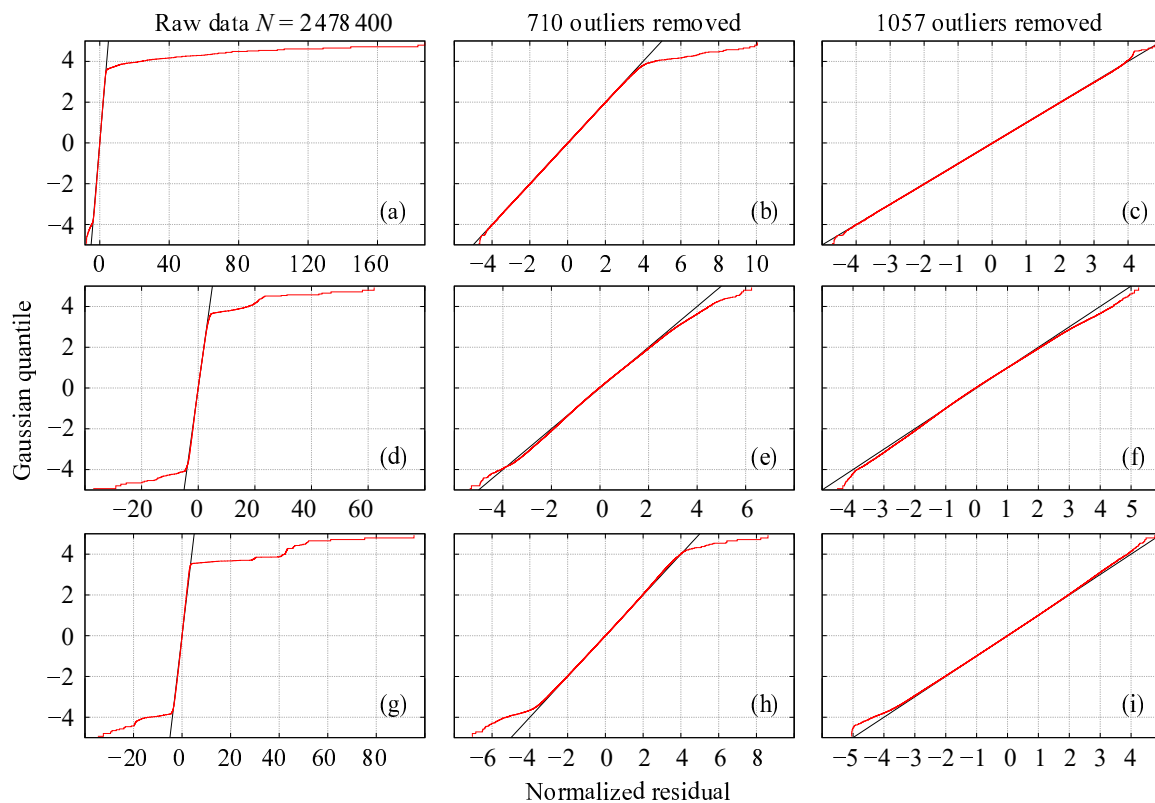


Рис. 1. Выбросы во всех (примерно 2.5 млн) кадрах BCD (объединенные данные по всем 13 вторичным затмениям). На панелях (a)–(c) показаны распределения невязок по потоку, а на панелях (d)–(f) и (g)–(i) — распределения координат x и y центра яркости. Панели (a, d, g) относятся к исходным данным, а панели (b, e, h) и (c, f, i) — к последующим этапам очистки от выбросов. На графиках по оси абсцисс отложены изучаемые значения (приведенные к нулевому среднему и единичной дисперсии), по оси ординат — нормальные квантили эмпирической функции распределения. Точное распределение Гаусса должно соответствовать главной диагонали, а отклонения от нее указывают на негауссовость (например, выбросы).

легко идентифицируются как протяженные хвосты, сильно отклоняющиеся от распределения Гаусса. Обычно на таких графиках четко видна точка поворота, за которой отклонение быстро нарастает, поэтому все кадры, оказавшиеся после этой точки, можно удалить как выбросы.

Удаление выбросов выполнялось дважды (см. выше шаги 4 и 6). При первом запуске мы использовали необработанные данные и предварительную модель k_3 из раздела 3.4 для получения невязок. Пороговое значение для всех тестов было установлено равным 6 (то есть предел 6σ). Получилось, что 710 BCD-кадров должны быть удалены как выбросы. Предварительный анализ (раздел 3.4) был проведен с использованием этого набора данных. На втором этапе мы еще раз проверили невязки нашей итоговой наилучшей модели, представленной в разделе 3.5. В этом случае дополнительные выбросы по потоку были обнаружены только в зоне положительных невязок, с порогом 4σ . По координатам центра яркости пороговое значение варьировалось для разных вторичных затмений. В общей сложности на финальном этапе обработки к выбросам отнесли 1057 BCD-кадров.

На рис. 1 показаны некоторые графики, иллюстрирующие поиск выбросов. Количество выбросов, обнаруженных для каждого вторичного затмения, а также объем данных, сохраненных до и после бинирования, приведены в таблице 1. Отметим, что на этапе бинирования BCD-кадров мы удаляли весь блок из 64 кадров даже при наличии в нем всего одного выброса.

2.3. Известные систематические ошибки в фотометрии IRAC

Существует хорошо известная систематическая ошибка, которая, вероятно, связана с внутриспиксельными колебаниями чувствительности, влияющими на канал IRAC 3.6 мкм, используемый в этой работе. Руководство по прибору IRAC²⁾ объясняет этот эффект различиями в квантовой эффективности в пределах каждого пикселя (рис. 2).

²⁾<http://irsa.ipac.caltech.edu/data/SPITZER/docs/irac>

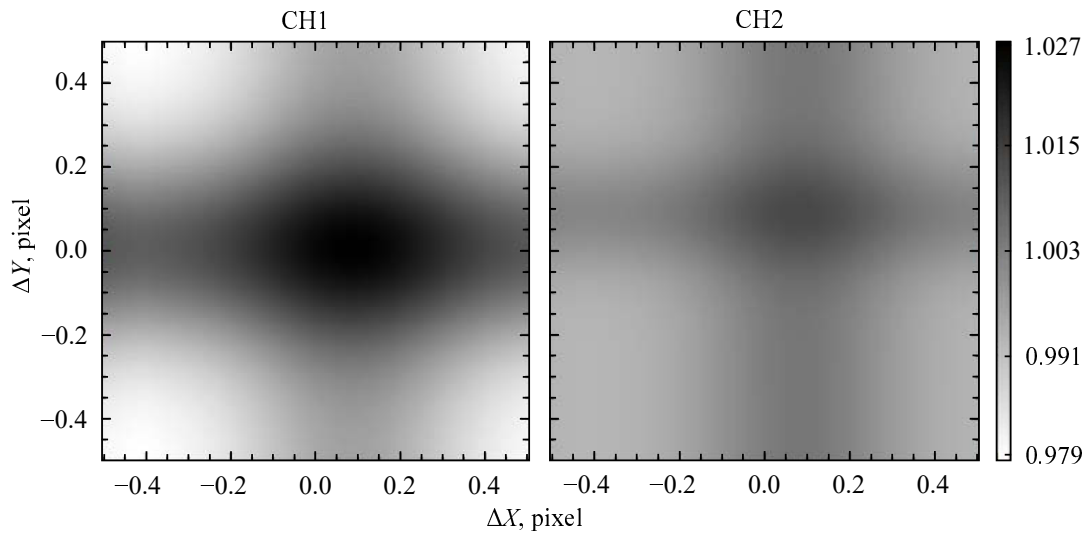


Рис. 2. Модель криогенного отклика пикселя IRAC демонстрирует внутрипиксельные колебания усиления в зависимости от фазы пикселя для каналов 1 (3.6 мкм) и 2 (4.5 мкм). Рисунок взят из руководства по эксплуатации прибора IRAC.

По этой причине измеренный поток коррелирует с положением звезды на матрице детектора. На рис. 3 показано, насколько сильно смещается центроид яркости в течение каждого из 13 вторичных затмений, обработанных в нашей работе. Как можно видеть, его движение в каждой серии наблюдений локализуется на графике в компактной области, преимущественно в квадрате размером 0.2×0.2 пикселя. Однако столь небольшие перемещения изображения источника по матрице детектора приводят к изменениям потока на несколько процентов. Во временной области этот эффект проявляется в виде квазипериодической переменности потока с периодом около 1 часа (рис. 4).

Эффект внутрипиксельных колебаний чувствительности часто моделировался с помощью полинома, зависящего от координат центроида яркости (Charbonneau et al., 2008; Knutson et al., 2008b; Desert et al., 2009). Evans et al. (2015) аппроксимировали его на основе модели гауссовского процесса (ГП). Также стоит отметить метод попиксельной декорреляции, который, в отличие от других подходов, для моделирования переменного потока использует отсчеты отдельных пикселей (Deming et al., 2015).

На данные телескопа Spitzer влияет и так называемый эффект рамп. Он наблюдался, в частности, в диапазонах 5.8 мкм и 8 мкм, которые в этой работе не рассматриваются. Данный эффект проявляется в плавном уменьшении или увеличении измеряемого сигнала; как полагают, его причина — изменение чувствительности отдельных пикселей со временем, причем скорость этого изменения зависит от уровня засветки пикселя (Knutson et al., 2007).

3. АНАЛИЗ ПРЕДОБРАБОТАННЫХ ДАННЫХ SPITZER/IRAC

3.1. Использование стационарных гауссовских процессов для моделирования данных с коррелированным шумом

При анализе данных телескопа Spitzer мы учитываем наличие небелого (коррелированного) шума, поэтому алгоритм их обработки играет важную роль в дальнейшем изложении. Наш метод предполагает, что коррелированный шум является гауссовским случайным процессом, и в целом он похож на алгоритм максимального правдоподобия, описанный в работе Valuev (2013a). При этом мы дополняем его возможностью регрессии по вспомогательным данным (например, координатам центроида яркости).

Метод основан на минимизации целевой функции:

$$f(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2} \ln \det \mathbf{V}(\boldsymbol{\eta}) + \frac{1}{2\gamma} \mathbf{r}^T(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{V}(\boldsymbol{\eta})^{-1} \mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}} \min, \quad (1)$$

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{z}', \boldsymbol{\theta}), \quad \gamma = 1 - \frac{\dim \boldsymbol{\theta}}{\dim \mathbf{r}}.$$

Введем следующие обозначения:

- 1) входные данные: время наблюдения t , первичные данные \mathbf{z} и вспомогательные данные \mathbf{z}' (используются для регрессии);
- 2) модель $\boldsymbol{\mu}$, аппроксимирующая кривую блеска (с возможной регрессией по \mathbf{z}'), и модель \mathbf{V} ковариационной матрицы шума;
- 3) свободные параметры $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\eta}$.

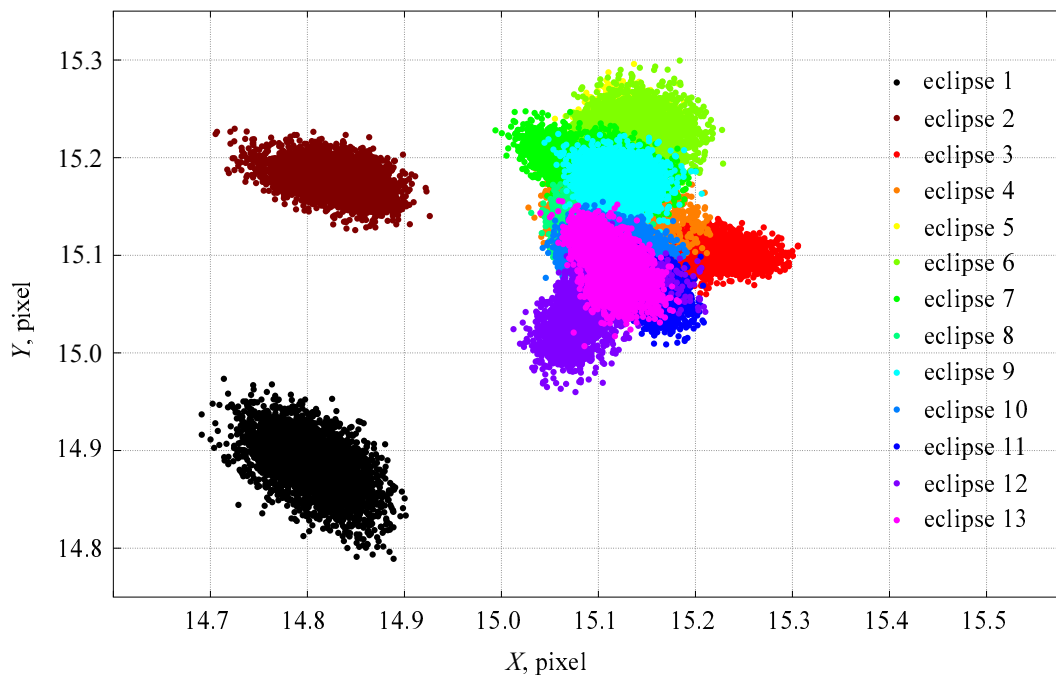


Рис. 3. Движение центра яркости в каждом из 13 вторичных затмений HD 209458 b.

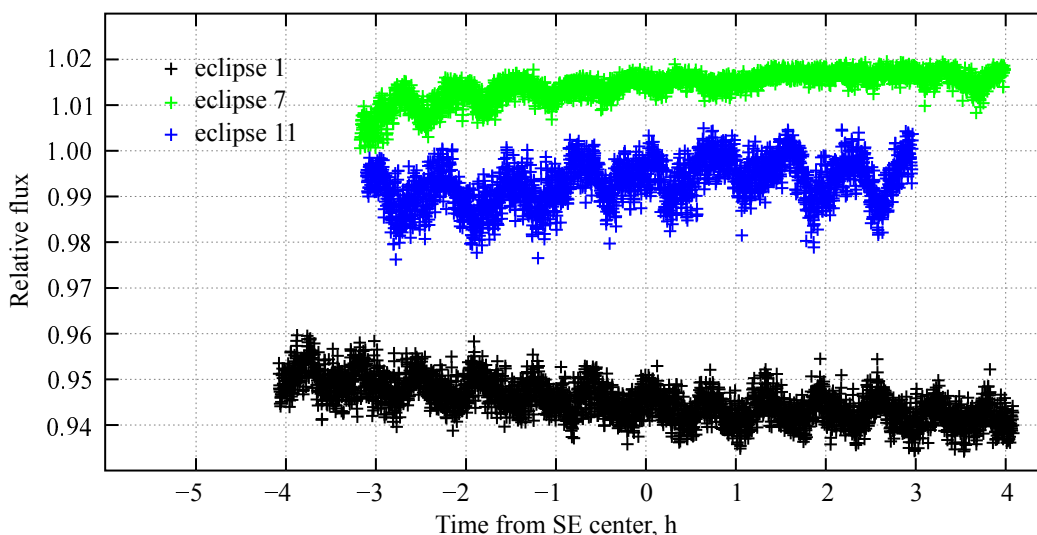


Рис. 4. Результаты фотометрии некоторых вторичных затмений HD 209458 b.

Количество наблюдений $N = \dim \mathbf{x}$. По определению вспомогательный вектор данных \mathbf{z}' состоит из N подвекторов \mathbf{z}'_i , каждый из которых соответствует i -му наблюдению z_i . Таким образом, полный вектор данных для одного наблюдения имеет вид $(t_i, z_i, \mathbf{z}'_i)$. В рассматриваемом случае \mathbf{z}'_i содержит две координаты центра яркости (x, y) , а z_i — измеренный поток в момент t_i . Предполагается, что весь шум сосредоточен в z_i , а возможные ошибки в \mathbf{z}'_i и t_i пренебрежимо малы, поэтому $\mathbf{V} = \text{Cov } \mathbf{x}$. Элементы \mathbf{V} мы находим через корреляционную функцию стационарного гауссовского

случайного процесса в следующем виде:

$$V_{ij}(\mathbf{t}, \boldsymbol{\eta}) = k(t_i - t_j, \boldsymbol{\eta}), \quad (2)$$

при этом элементы вектора $\boldsymbol{\mu}$ рассчитываются как

$$\mu_i = \mu(t_i, \mathbf{z}'_i, \boldsymbol{\theta}). \quad (3)$$

Таким образом, все характеристики шума задаются функцией $k(\tau, \boldsymbol{\eta})$, а фотометрическая кривая (включая возможные регрессии) — функцией $\mu(t, \mathbf{z}', \boldsymbol{\theta})$.

Целевая функция f в уравнении (1) представляет собой отрицательный логарифм правдоподобия

бия $(-\ln \mathcal{L} + \text{const})$, несколько модифицированный делителем γ . Последний помогает предотвратить смещенность параметров шума $\boldsymbol{\eta}$, которая возникает из-за того, что невязки \mathbf{r} после процедуры фиттинга систематически занижены относительно реального уровня шума (см. также Valuev, 2009).

Необходимо выделить два основных ограничения этого метода, которые могут оказаться важными в нашей работе:

- 1) гауссовский процесс, лежащий в основе модели шума \mathbf{x} , считается стационарным, поэтому корреляционная функция $k(\tau, \boldsymbol{\eta})$ зависит только от временного аргумента τ — задержки по времени между двумя наблюдениями;
- 2) вспомогательные данные регрессии \mathbf{z}' предполагаются абсолютно точными либо их погрешностью можно пренебречь.

Численные инструменты для минимизации уравнения (1) доступны в ПО PlanetPack, написанном на языке C++ (Valuev, 2013b; 2018), где реализована градиентная оптимизация f методом Левенберга—Марквардта. Однако прямое использование PlanetPack в данной работе оказалось затруднительным: его архитектура недостаточно адаптирована для обработки вторичных затмений. Поэтому в рамках исследования мы извлекли необходимые части кода C++ и дополнили их возможностью фиттинга регрессии.

3.2. Базовые модели кривой блеска вторичного затмения и его шума

Сначала обсудим нашу фотометрическую модель μ . Она представляет собой кривую блеска вторичного затмения в сочетании с полиномиальным трендом, который аппроксимируется кубическим полиномом $P_3(t, \mathbf{a}_i)$ с четырьмя свободными коэффициентами \mathbf{a}_i для каждого i -го вторичного затмения. Тренды необходимы для учета возможного долговременного коррелированного шума, не полностью описываемого нашими моделями, а также возможной долговременной переменности звезды или детектора.

Вторичное затмение аппроксимировалось в предположении, что планета имеет равномерно яркий диск и движется с постоянной скоростью по прямой траектории позади родительской звезды. Данное приближение оказалось достаточно точным для целей исследования, поскольку основное внимание уделялось моделям шума, а точная форма кривой блеска вторичного затмения имела второстепенное значение. Равномерно яркий диск планеты соответствует простой модели кривой блеска, эквивалентной модели Mandel and Agol (2002) для кривых блеска прохождений без эффекта потемнения к краю. Нужно лишь поменять местами

радиусы звезды и планеты, потому что теперь именно звезда блокирует ИК-свет, испускаемый планетой. В обозначениях, аналогичных тем, что использовали Baluev and Shaidulin (2015), падение потока во время вторичного затмения определяется как

$$\begin{aligned} \Delta F(F_p, D, R_p, R_\star) &= \frac{F_p}{\pi} \left[\Psi(\delta, 1, r) \right. \\ &\quad \left. + r^2 \Psi(\delta, r, 1) - \frac{Q(\delta, r)}{2} \right], \\ Q(\delta, r) &= \mathcal{Q}((1 - (\delta - r)^2)((\delta + r)^2 - 1)), \\ \Psi(\delta, x, y) &= \mathcal{A}\left(\frac{\delta^2 + x^2 - y^2}{2x\delta}\right), \\ \mathcal{Q}(x) &= \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \\ \mathcal{A}(x) &= \begin{cases} \pi, & x < -1, \\ \arccos(x), & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases} \\ r = \frac{R_\star}{R_p} > 1, \quad \delta = \frac{D}{R_p}, \end{aligned} \quad (4)$$

где D — расстояние между центрами дисков планеты и звезды, R_p — радиус планеты, R_\star — радиус звезды, а F_p — поток излучения от планеты без учета затмений.

Поскольку модель, представленная в уравнении (4), является лишь аппроксимацией первого порядка, наша формальная задача заключается в том, чтобы либо подтвердить ее соответствие данным, либо выявить возможные отклонения от этой модели. Параметры орбиты планеты, определяющие D как функцию времени, а также радиусы R_p и R_\star были взяты из работы Womoto et al. (2017). В данном исследовании мы не варьировали большинство из них, поскольку рассматривали только вторичные затмения, дающие менее точные оценки в сравнении с анализом полных данных, включающих кривые блеска прохождений.

В итоге наша «минимальная» модель для i -ой инфракрасной кривой блеска выглядит так:

$$\begin{aligned} \mu_0(t, \boldsymbol{\theta}) &= P_3(t, \mathbf{a}_i) \\ &\quad + \Delta F(F_p, D(t - \Delta t_{SE}), R_p, R_\star), \quad (5) \\ \boldsymbol{\theta} &= \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{N_{SE}}, F_p, \Delta t_{SE}\}. \end{aligned}$$

Подстраиваемые параметры включают все \mathbf{a}_i (заданы индивидуально для каждого i -го вторичного затмения) и два общих параметра: глубину вторичного затмения F_p и Δt_{SE} — общее смещение вторичного затмения по времени относительно

прогнозируемого среднего момента (в предположении нулевого эксцентриситета орбиты). Если Δt_{SE} окажется ненулевым, он может указывать либо на асимметрию профиля яркости планеты (например, на нецентральное горячее пятно), либо на ненулевой эксцентриситет орбиты.

Общее количество свободных параметров в μ_0 составляет $\dim \boldsymbol{\theta} = 4N_{SE} + 2$. Обратим внимание, что μ_0 — это всего лишь «минимальная» модель, поскольку в ней еще не задействованы данные регрессии \boldsymbol{z}' . Поэтому она применяется только для предварительного анализа, описанного ниже.

Теперь перейдем к моделям шума. Как уже отмечалось, ковариационная матрица \mathbf{V} должна быть заполнена с использованием некоторого ядра (или корреляционной функции) $k(\Delta t, \boldsymbol{\eta})$. В нашем исследовании мы применили гибкий подход и построили k в виде произвольной суперпозиции следующих «примитивных» членов:

$$\begin{aligned} k_{WN}(\Delta t, \boldsymbol{\eta}_{WN}) &= \sigma_{WN}^2 \times \begin{cases} 1, & \Delta t = 0, \\ 0, & \Delta t \neq 0, \end{cases} \\ \boldsymbol{\eta}_{WN} &= \{\sigma_{WN}\}, \\ k_{RN}(\Delta t, \boldsymbol{\eta}_{RN}) &= \sigma_{RN}^2 \exp\left(-\frac{\Delta t^2}{2\tau_{RN}^2}\right), \\ \boldsymbol{\eta}_{RN} &= \{\sigma_{RN}, \tau_{RN}\}, \\ k_{QPN}(\Delta t, \boldsymbol{\eta}_{QPN}) &= \sigma_{QPN}^2 \\ &\times \exp\left(-\frac{\Delta t^2}{2\tau_{QPN}^2}\right) \cos \frac{2\pi \Delta t}{P_{QPN}}, \\ \boldsymbol{\eta}_{QPN} &= \{\sigma_{QPN}, \tau_{QPN}, P_{QPN}\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Этот метод основан на схеме строительных блоков, аналогичной используемой в PlanetPack. Более подробный теоретический обзор и практическую альтернативу можно найти в статье Fogeman-Maskey et al. (2017). Здесь k_{WN} обозначает белый шум, k_{RN} — красный шум (с гауссовым ядром), а k_{QPN} — квазипериодический шум. Поскольку ядро k представляет собой комбинацию уравнений (6), вектор $\boldsymbol{\eta}$ является аналогичной комбинацией соответствующих параметров отсюда же. Отметим, что для кривых блеска разных вторичных затмений мы задавали единую структуру шума (то есть функцию k), однако для каждой кривой блеска использовали независимые подмножества параметров $\boldsymbol{\eta}$ и варьировали их отдельно друг от друга.

3.3. Коррелограммы и их обработка

Все кривые блеска, которые мы здесь рассматриваем, представляют собой равномерные времен-

ные ряды: $x_k = x(t_k)$ с $t_k = k\Delta t$ и $\Delta t \simeq 8.4 \text{ с}^3$. Эти данные можно обрабатывать с помощью классической коррелограммы, которая определяется как

$$C_n = \frac{1}{N-n} \sum_{k=0}^{N-n-1} x_k x_{k+n}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (7)$$

Это несмещенная версия коррелограммы, такая, что $\mathbb{E}C_n = K_n$, где K_n — корреляционная функция, $K_n = k(n\Delta t) = \mathbb{E}x_k x_{k+n}$. Здесь $x(t)$ должно быть стационарным (иначе k зависело бы от двух аргументов времени, а не от одного), иметь нулевое математическое ожидание (иначе его нужно было бы вычесть) и постоянную дисперсию (иначе в это определение нужно было бы добавить весовые коэффициенты или предварительно нормализовать x_k).

Поскольку наши значения x_k на самом деле не имеют нулевого математического ожидания, на практике мы будем применять уравнение (7) к их невязкам r_k , полученным путем вычитания наиболее подходящей модели μ_0 . Такая коррелограмма будет называться коррелограммой невязок после наилучшего подбора (Correlogram of the Best-Fit Residuals, CBFR). Для данных с небелым шумом мы предполагаем наличие некоторого ядра $k(\Delta t)$, которое формирует ковариационную матрицу \mathbf{V} . Исходя из этого, мы можем вычислить «отбеленные» невязки как $\boldsymbol{r}' = \mathbf{V}^{-1/2} \boldsymbol{r}$. Если модель k подобрана хорошо, то $\text{Var } \boldsymbol{r} \simeq \mathbf{V}$ с высокой точностью, а \boldsymbol{r}' должно быть очень похоже на стандартный белый шум с $\text{Var } \boldsymbol{r}' = \mathbf{I}$ (единичная матрица). Таким образом, коррелограмма \boldsymbol{r}' (иначе говоря — «отбеленная» CBFR) должна быть близка к коррелограмме стандартного белого шума. Наша формальная задача — добиться этого, итеративно улучшив ядро k .

Когда k задано белым шумом, ковариационная матрица \mathbf{V} становится диагональной, и такое «отбеливание» сводится к простому нормированию невязок на их модельные погрешности. Тогда CBFR нормализуется на соответствующую дисперсию, равную $k(0)$.

Кроме того, нам необходимо представить математические инструменты и формулы, необходимые для оценки погрешности и различных показателей значимости, связанных с CBFR. В уравнениях (5.3.21–22) из книги Priestley (1981) приводится вывод формул для дисперсии C_n :

$$\begin{aligned} D_n = \mathbb{D}C_n &= \frac{K_0^2 + K_n^2}{N-n} + \frac{2}{N-n} \\ &\times \sum_{s=1}^{N-n-1} \frac{N-n-s}{N-n} (K_s^2 + K_{s-n}K_{s+n}). \end{aligned} \quad (8)$$

³⁾Выбросы были заменены на нули.

Аналогичный вопрос обсуждался в работе Valuev and Fedotov (2026). Это уравнение можно использовать для оценки погрешности СВФР как $\pm\sqrt{D_n}$. Помимо стационарности входных данных, оно требует, чтобы все x_k были распределены по нормальному закону (что мы в любом случае предполагаем, моделируя x_k с помощью гауссовского процесса).

Важно, что D_n в уравнении (8) определяется всем набором K_n , а значит, погрешность C_n зависит от принятой модели шума. Например, если предположить, что x_k — это белый шум, то все K_n , кроме K_0 , равны нулю и

$$D_n = \begin{cases} K_0^2/(N - n), & n > 0, \\ 2K_0^2/N, & n = 0. \end{cases} \quad (9)$$

При этом для белого шума корреляция между различными C_n обращается в ноль, как следует из работы Priestley (1981). Однако в общем случае (небелого шума) вид D_n отличается от уравнения (9), а между C_n могут возникать ненулевые корреляции.

Ниже после каждой i -й итерации нашей обработки данных будут ставиться два вопроса:

- 1) достаточно ли хорошо наша текущая модель шума k_i описывает данные, или ее нужно дополнить;
- 2) является ли наша потенциальная следующая шумовая модель k_{i+1} значительно лучше текущей модели k_i .

Чтобы ответить на первый вопрос, нам необходимо сконструировать статистический тест, способный проверить, согласуется ли текущая отбеленная СВФР с СВФР стандартного белого шума, погрешности которой заданы уравнением (9). Для достижения этой цели мы рассмотрели две метрики, измеряющие расстояние между векторами \mathbf{C} и \mathbf{K}_{SWN} :

$$L_2 = \frac{N}{2}(C_0 - 1)^2 + \sum_{n=1}^{N-1} (N - n)C_n^2,$$

$$L_\infty = \max\left(|C_0 - 1| \sqrt{\frac{N}{2}}, \max_{n=1,2,\dots,N-1} |C_n| \sqrt{N - n} \right). \quad (10)$$

Подробности критериев, основанных на этих метриках, например их функции распределения и некоторые подводные камни, обсуждаются в разделе 4.

Чтобы ответить на второй вопрос, рассмотрим критерий отношения правдоподобия. На i -й итерации мы получаем наилучшую модель данных,

используя ядро шума k_i , а в качестве побочного результата — минимальное значение \hat{f} целевой функции (1), которое связано с логарифмом функции правдоподобия. Пусть две наиболее подходящие модели, k_i и k_{i+1} , соответствуют минимумам \hat{f}_i и \hat{f}_{i+1} . Тогда разность

$$Z = 2(\hat{f}_i - \hat{f}_{i+1}) \quad (11)$$

представляет собой удвоенную статистику отношения правдоподобия⁴). Асимптотическая ($N \rightarrow \infty$) функция распределения Z равна χ^2 с $(\dim \boldsymbol{\eta}_{i+1} - \dim \boldsymbol{\eta}_i)$ -степенями свободы. Это позволяет нам проверить с использованием той же схемы, что и в разделе 4 для L_2 , обеспечивает ли k_{i+1} значительное улучшение по сравнению с k_i .

3.4. Предварительное исследование структуры шума

Задача этого раздела — построение все более сложных (и точных) моделей шума до тех пор, пока отбеленная СВФР не окажется согласована с белым шумом. Наша цель состоит в том, чтобы систематически исследовать структуру шума Spitzer/IRAC, рассматривая эффект внутрипиксельного изменения чувствительности лишь как один из возможных факторов.

Давайте начнем с модели μ_0 и модели чисто белого шума:

$$k_0 = k_{\text{WN}}. \quad (12)$$

В этом случае фиттинг методом максимального правдоподобия из раздела 3.1 сводится к нелинейному методу наименьших квадратов; при этом σ_{WN} равна квадратному корню из получаемого значения χ^2 , которое, в свою очередь, пропорционально среднеквадратичным невязкам.

Однако все СВФР оказались ожидаемо несогласующимися со стандартным белым шумом. Соответствующие уровни значимости s (в единицах стандартного отклонения) приведены в таблице 3; вероятность ложной тревоги равна $2\Phi(-s)$, где Φ — стандартное нормальное распределение. Примеры СВФР представлены на панелях (а) рис. 5–7.

На этом начальном этапе все СВФР демонстрируют очевидные квазипериодические колебания с периодом около 1 часа, которые, вероятно, вызваны эффектом внутрипиксельных изменений чувствительности в связке с ошибками гидирования.

⁴Согласно Valuev (2009), формула для Z усложняется из-за поправки γ , вводимой в уравнение (1). Однако в нашем случае γ_i и γ_{i+1} одинаковы, поскольку они зависят только от количества $\boldsymbol{\theta}$ -параметров, которое одинаково для всех k_i . Благодаря этому уравнение (11) упрощается до классического вида.

Наиболее подходящая модель среди приведенных в уравнениях (6) — это k_{QPN} . Следовательно, нашим следующим ядром должно стать:

$$k_1 = k_{\text{WN}} + k_{\text{QPN}}. \quad (13)$$

После запуска алгоритма для этого ядра мы ожидали получить улучшенную модель, учитывающую значительную часть эффекта внутрипиксельных изменений чувствительности и оставляющую лишь небольшую остаточную погрешность.

Однако для многих вторичных затмений член QPN оказывается вырожденным ($\tau_{\text{QPN}} \ll P_{\text{QPN}}$), по сути превращаясь в член вида k_{RN} , тогда как фактический QPN-компонент остается неучтенным. Оказалось, что каждая кривая блеска дополнительно содержит красный шум k_{RN} , который визуальнo незаметен из-за очень короткого τ_{RN} (порядка 10 секунд) и обычно влияет только на 2–3 соседних наблюдения. Однако этот шум имеет большую дисперсию, сравнимую с дисперсией QPN, потому алгоритм сошелся либо к QPN, либо к RN, в зависимости от кривой блеска. На панелях (а) рис. 5–7 этот короткий временной шум RN можно заметить по нескольким отклоняющимся точкам вблизи нулевой абсциссы (они обозначены более крупным символом и визуальнo находятся на оси ординат).

Поскольку модель k_1 оказалось сложно применить без вырождения в QPN-члене, мы пропустили эту итерацию и сразу перешли к следующей ($i = 2$), где использовали трехчленную функцию ядра:

$$k_2 = k_{\text{WN}} + k_{\text{RN}} + k_{\text{QPN}}. \quad (14)$$

WN-слагаемое остается обязательным; QPN-член, как и прежде, должен моделировать эффект внутрипиксельного изменения чувствительности; дополнительно мы включили член RN. Формально критерий отношения правдоподобия показал, что модель k_2 существенно превосходит модель k_0 (см. таблицу 2). Такое значительное улучшение говорит о том, что уравнение (14) учитывает большую часть коррелированного шума.

Тем не менее модель k_2 неидеально описывает данные, на что указывают критерии значимости, приведенные в таблице 3, и иллюстрации на панелях (б) рис. 5–7. Компонент QPN часто имел слишком короткое τ_{QPN} , оставляя в отбеленной СВFR значительную долговременную корреляцию. Отчасти этот остаточный эффект объясняется несинусоидальной формой компонента внутрипиксельных изменений чувствительности, которую наша модель QPN не способна аппроксимировать с хорошей точностью. Однако при более тщательном анализе мы обнаружили, что можно добиться даже лучшего соответствия, добавив еще один компонент RN с $\tau_{\text{RN}} \sim 5$ минут. Визуально

Таблица 2. Проверка того, насколько значительно модели шума улучшают аппроксимацию. В столбцах таблицы представлены: (1) — модель шума; (2) — минимум целевой функции; (3) — удвоенная статистика отношения правдоподобия, сравнивающая данную модель с моделью из предыдущей строки; (4) — квантиль нормального распределения, соответствующий этому отношению правдоподобия

Модель	\hat{f}	Z	s
k_0	-203 648.8	—	—
k_2	-219 681.4	32 000	2800
k_3	-220 020.1	680	91
k'_0	-252 754.7	—	—
k'_2	-254 325.6	3100	430
k'_3	-254 537.3	420	55

Таблица 3. Проверка того, насколько сильно шумовые модели отклоняются от гипотезы о белом шуме. Значимые уровни выше $s = 2$ выделены жирным шрифтом

	Нормальные уровни значимости s											
	с метрикой L_2						с метрикой L_∞					
	k_0	k_2	k_3	k'_0	k'_2	k'_3	k_0	k_2	k_3	k'_0	k'_2	k'_3
1	390	2.8	1.4	8.2	0.2	0	38	0.7	1.1	7.9	2.5	0.2
2	450	3.2	1.6	36	0	0	43	3.2	1.0	11	3.6	1.1
3	630	0.2	0.4	81	1.0	0.3	49	0.3	0.7	12	2.2	0.2
4	170	4.9	0.9	14	4.4	0.2	35	2.1	1.7	8.8	2.6	0.7
5	180	7.2	3.3	34	6.6	3.1	34	2.1	0.5	15	2.8	1.2
6	170	2.3	0	32	1.9	1.9	36	3.4	1.6	9.9	3.7	3.5
7	310	12	6.7	69	3.0	0.6	36	3.8	4.1	16	5.6	0.6
8	340	9.0	2.5	24	3.4	1.2	37	2.8	0.9	10	1.3	1.4
9	260	0	0	88	0.2	0.2	35	0.3	0.3	8.2	2.3	2.2
10	420	2.8	2.5	8.2	0.6	0	39	2.4	2.3	5.1	1.2	1.0
11	420	17	0	15	1.2	0.3	40	3.2	0.1	4.1	0.8	0.4
12	330	9.4	3.5	48	9.1	6.6	41	4.5	2.0	9.8	3.7	3.0
13	320	11	0	21	0.1	0	40	2.6	1.4	10	3.2	0

(в СВFRs) этот дополнительный компонент менее заметен, поскольку он влияет в основном на диапазон вблизи нулевой абсциссы (например, только на второй локальный максимум корреляционной функции), но по метрикам коррелограмм L_2 и L_∞ его вклад оказался значительным.

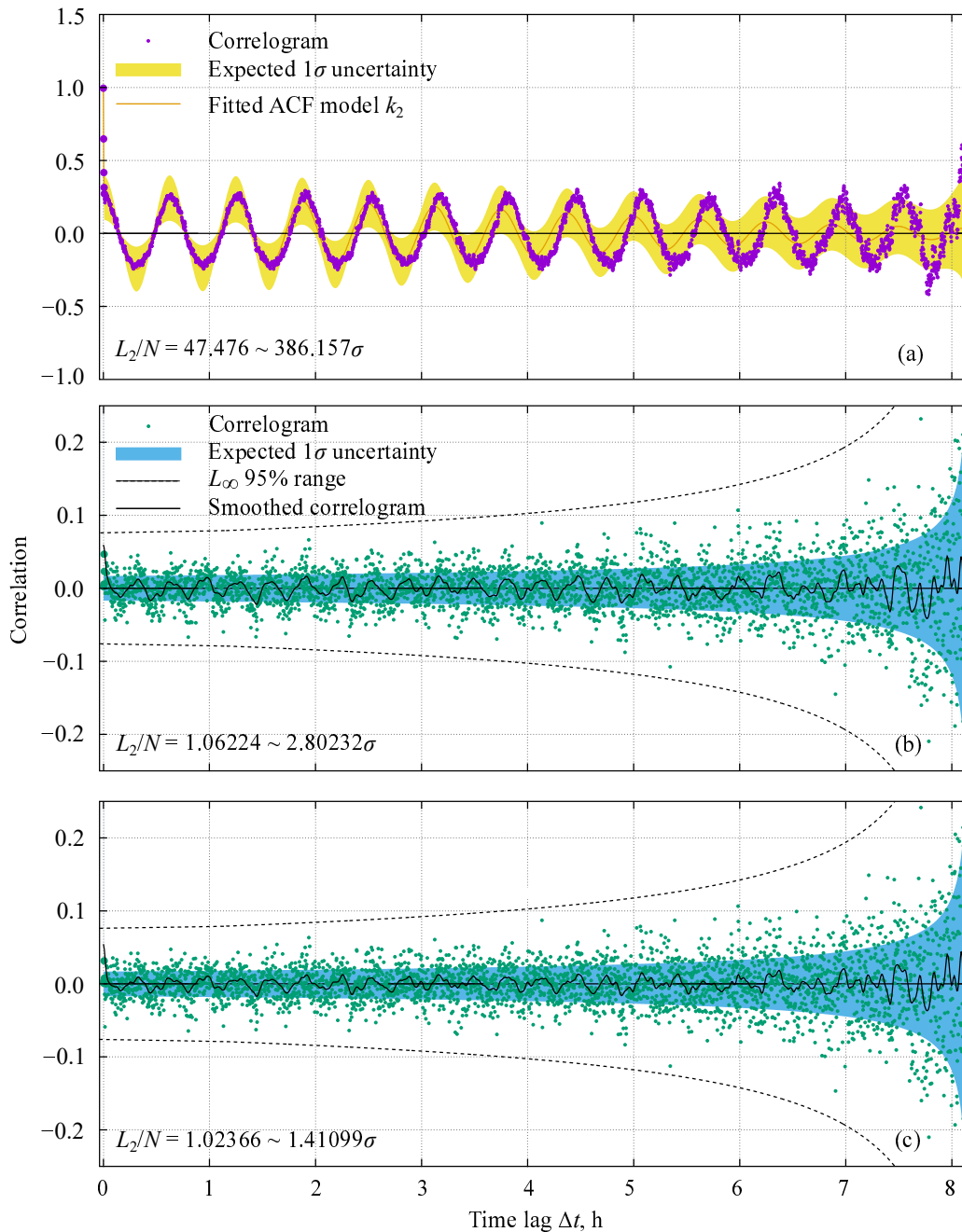


Рис. 5. Коррелограммы невязок наилучшего соответствия (CBFR) для первого вторичного затмения. На панели (а) показана СВФР для модели с чистым белым шумом k_0 и модели наилучшего соответствия k_2 . Погрешность рассчитана по уравнению (8), и все значения нормализованы по дисперсии наилучшего соответствия, взятой из модели k_0 . На панели (b) представлена отбеленная СВФР для модели шума k_2 , а на панели (c) — отбеленная СВФР для модели шума k_3 .

В итоге функция ядра для шума была задана следующим образом:

$$k_3 = k_{WN} + k_{RN,1} + k_{RN,2} + k_{QPN}. \quad (15)$$

Эта четырехчленная модель описывает шум с наилучшей точностью и приводит к несомненному улучшению по функции правдоподобия (см. таблицу 2). Как видно из таблицы 3, статистическая точность данной модели вполне приемлема для многих

вторичных затмений, но в ряде случаев расхождение остается довольно большим. В некоторых СВФР можно заметить остаточную субгармонику в QPN-члене, по-видимому, из-за несинусоидальной формы соответствующей переменности. Кроме того, иногда дисперсия полученной модели не соответствовала выборочной дисперсии невязок, что приводило к несовпадению пропорций между k_3 и СВФР. Мы объясняем подобное поведение тем, что

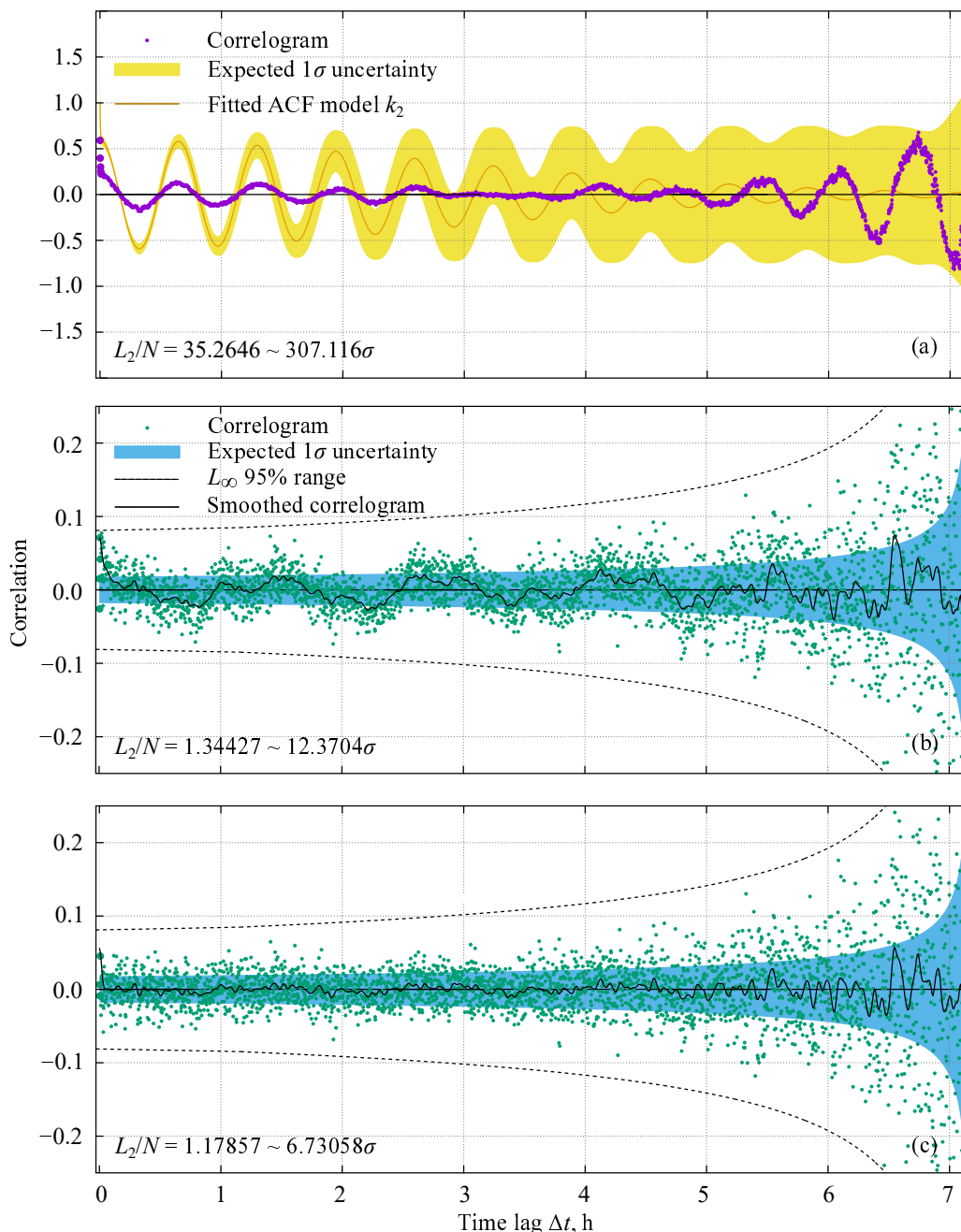


Рис. 6. То же, что и на рис. 5, но для 7-го вторичного затмения.

во время наблюдений таких кривых блеска происходили события, связанные с гидированием, из-за которых член QPN оказался нестационарным. Это сделало наш метод ГП-фиттинга ненадежным.

На основе предварительного анализа мы делаем следующие основные выводы.

1. Структура коррелированного шума в фотометрии телескопа Spitzer/IRAC на длине волны 3.6 мкм оказалась сложнее, чем предполагалось ранее. Помимо квазипериодического шума, вызванного внутрипиксельными вариациями чув-

ствительности, в нем присутствует компонент красного шума. Сам по себе такой вывод не нов — например, Evans et al. (2015) моделировали одиночный RN-член в дополнение к эффекту внутрипиксельных изменений чувствительности, но он до сих пор недостаточно изучен, а его физическая природа неясна.

2. Компонент красного шума, в свою очередь, разделяется на два субкомпонента с разным временем корреляции (около 10 с и 5 мин.).

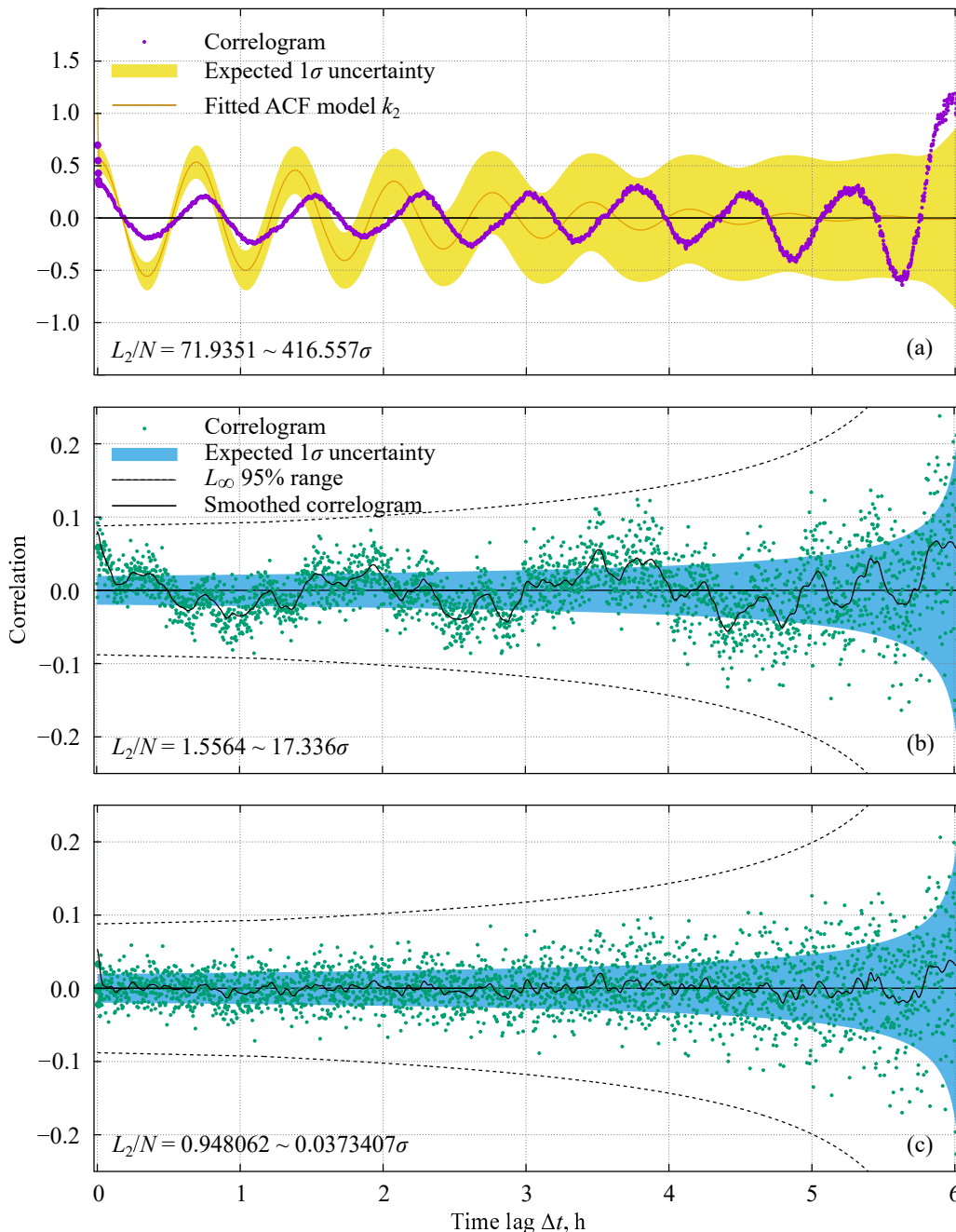


Рис. 7. То же, что и на рис. 5, но для 11-го вторичного затмения.

Возможно, за них отвечают разные физические механизмы.

3. В данных не удалось надежно обнаружить дополнительные шумовые составляющие, однако переменность, вызванная эффектом внутрипиксельных изменений чувствительности, требует более точного моделирования, чем предлагаемая нами стационарная QPN-модель. После этого все предварительные результаты необходимо перепроверить.

3.5. Построение окончательной модели для оценки шумовых и систематических эффектов

В предыдущем разделе мы моделировали эффект внутрипиксельных изменений чувствительности с помощью стационарного члена QPN, то есть исключительно во временной области. В этом разделе мы повторно проанализируем correlogramмы, но заменим эту модель на другую (более точную). В остальном анализ остается прежним. В частности, мы стремимся сравнить следующие три модели

шума:

$$\begin{aligned} k'_0 &= k_{\text{WN}}, \\ k'_2 &= k_{\text{WN}} + k_{\text{RN}}, \\ k'_3 &= k_{\text{WN}} + k_{\text{RN},1} + k_{\text{RN},2}, \end{aligned} \quad (16)$$

которые аналогичны ранее определенным ядрам k_0 , k_2 , и k_3 .

Известно много способов редукции эффекта внутрипиксельных изменений чувствительности на данные IRAC (см. раздел 2.3), и большинство из них в том или ином виде используют положение центра яркости (x, y) . Например, классический набор методов основан на линейной или нелинейной полиномиальной зависимости от (x, y) . В этой работе мы также применяем подход такого рода, но используем другую функцию (x, y) . Стоявшая за этим идея заключалась в создании двумерной периодической функции (x, y) , которая могла бы имитировать фазовую характеристику пикселя, показанную на рис. 2, и аппроксимировать эффект внутрипиксельных изменений чувствительности одновременно по всем 13 кривым блеска вторичных затмений. Такая модель может представлять собой двумерный ряд Фурье, усекаемый по определенной длине вектора пространственной частоты (u, v) , например, как в следующих формулах:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(x, y) &= a_1 \cos 2\pi x + b_1 \sin 2\pi x \\ &+ a_2 \cos 2\pi y + b_2 \sin 2\pi y, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1.5}(x, y) &= \varepsilon_1(x, y) \\ &+ a_3 \cos 2\pi(x + y) + b_3 \sin 2\pi(x + y) \\ &+ a_4 \cos 2\pi(x - y) + b_4 \sin 2\pi(x - y), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2(x, y) &= \varepsilon_{1.5}(x, y) \\ &+ a_5 \cos 4\pi x + b_5 \sin 4\pi x \\ &+ a_6 \cos 4\pi y + b_6 \sin 4\pi y, \\ &\dots \end{aligned} \quad (19)$$

Ряд ε_1 содержит четыре гармоники Фурье, где (u, v) равно $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$, поэтому он усекается при $\sqrt{u^2 + v^2} \leq 1$. Ряд $\varepsilon_{1.5}$ добавляет четыре «смешанные» гармоники Фурье с $(u, v) = (\pm 1, \pm 1)$ и усекается при $\sqrt{u^2 + v^2} \leq \sqrt{2}$ (эквивалентно $\sqrt{u^2 + v^2} \leq 1.5$, поэтому для простоты нижний индекс установлен равным 1.5). Аналогично ряд ε_2 усекается при $\sqrt{u^2 + v^2} \leq 2$. Периоды задаются в один пиксель по обоим направлениям.

Однако на практике модели такого типа могут приводить к вырождению, поскольку в пределах

одной кривой блеска вторичного затмения координаты (x, y) изменяются лишь на незначительную величину (см., например, рис. 3; стандартное отклонение составляет около 0.04 пикселя для каждого подмножества вторичного затмения). В этом случае некоторые базисные функции в уравнении (18) становятся почти зависимыми, что приводит к вырождению модели. Чтобы решить эту проблему, мы сделали замену: $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, где (x_0, y_0) — средние координаты, зависящие от вторичного затмения. Затем рассмотрели модель уравнения (18) локально для небольших Δx , Δy , и оказалось, что

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1.5}(x, y, \mathbf{c}) &= c_1 \sin 2\pi \Delta x + c_2 (2 \sin^2 \pi \Delta x) \\ &+ c_3 \sin 2\pi \Delta y + c_4 (2 \sin^2 \pi \Delta y) \\ &+ c_5 (2 \sin 2\pi \Delta x \sin 2\pi \Delta y) \\ &+ \mathcal{O}((\Delta x^2 + \Delta y^2)^{3/2}). \end{aligned} \quad (20)$$

Как видно, это приближение содержит пять членов вместо восьми. Для малых значений $(\Delta x, \Delta y)$ данная модель эквивалентна квадратичному полиному, что, по-видимому, является оптимальной или близкой к оптимальной степенью полинома для эффекта внутрипиксельных изменений чувствительности (Desert et al., 2009). Следует обратить внимание, что член с c_5 не появился бы в уравнении (20), если бы мы использовали ε_1 вместо $\varepsilon_{1.5}$. Это привело бы к снижению точности модели, поэтому были необходимы смешанные члены в $\varepsilon_{1.5}$.

Суммируя «минимальную» модель μ_0 в уравнении (5) и упрощенное выражение для $\varepsilon_{1.5}$ в уравнении (20), мы получаем итоговую составную модель потока⁵⁾:

$$\begin{aligned} \mu(t, \mathbf{z}' = \{x, y\}, \boldsymbol{\theta}) &= P_3(t, \mathbf{a}_i) + \varepsilon_{1.5}(x, y, \mathbf{c}_i) \\ &+ \Delta F(F_p, D(t - \Delta t_{\text{SE}}), R_p, R_\star), \\ \boldsymbol{\theta} &= \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{N_{\text{SE}}}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_{N_{\text{SE}}}, F_p, \Delta t_{\text{SE}}\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Количество $\boldsymbol{\theta}$ -параметров в этой модели становится равным $9N_{\text{SE}} + 2 = 119$, а количество $\boldsymbol{\eta}$ -параметров зависит от модели шума, которую мы выбираем из уравнений (16), и может быть $N_{\text{SE}} = 13$, $3N_{\text{SE}} = 39$, $5N_{\text{SE}} = 65$. Общее количество свободных параметров составляет 132, 158 или 184, что все еще много меньше количества наблюдений.

⁵⁾Формально более строгое определение потока должно было бы содержать $(F_\star + \Delta F)(1 + \varepsilon_{1.5})$ вместо суммы $\Delta F + \varepsilon_{1.5}$, но в уравнении (21) мы пренебрегли малым произведением $\Delta F \varepsilon_{1.5}$ для простоты.

Таблица 4. Наилучшие оценки параметров модели k'_3

	$\sigma_{\text{WN}} \times 10^4 F_\star^{-1}$	$\sigma_{\text{RN},1} \times 10^4 F_\star^{-1}$	$\sigma_{\text{RN},2} \times 10^4 F_\star^{-1}$	$\tau_{\text{RN},1}, \text{ s}$	$\tau_{\text{RN},2}, \text{ s}$
1	6.69 (12)	1.98 (23)	2.34 (27)	284 (55)	19.9 (4.7)
2	6.77 (19)	2.61 (33)	2.88 (41)	631 (91)	12.8 (3.1)
3	6.92 (13)	3.32 (35)	2.43 (31)	483 (56)	17.4 (4.3)
4	6.70 (56)	2.07 (30)	4.21 (88)	456 (99)	9.8 (2.8)
5	7.67 (17)	2.74 (40)	5.14 (27)	458 (105)	17.7 (1.8)
6	6.96 (18)	3.47 (45)	2.86 (40)	578 (77)	14.2 (3.6)
7	7.12 (14)	3.68 (38)	3.50 (27)	354 (45)	17.7 (2.7)
8	6.60 (17)	2.27 (25)	3.00 (34)	233 (42)	13.9 (3.0)
9	6.86 (15)	3.06 (41)	1.66 (51)	604 (80)	16.5 (9.4)
10	6.95 (12)	1.71 (28)	2.34 (28)	523 (136)	24.7 (6.1)
11	6.66 (15)	1.59 (30)	2.13 (41)	906 (228)	16.3 (5.8)
12	6.65 (24)	2.57 (31)	3.26 (47)	380 (62)	12.0 (2.9)
13	6.93 (17)	2.69 (28)	3.08 (34)	199 (34)	15.3 (3.3)

$F_p \times 10^4 F_\star^{-1} = 12.54 \pm 0.42, \Delta t_{\text{SE}} = -4 \pm 40 \text{ s}, F_\star = (0.86940 \pm 0.00029) \text{ Jy.}$

Мы воспроизвели анализ, описанный в разделе 3.4, по той же схеме, но с использованием модели из уравнения (21) и алгоритма ГП-фиттинга из раздела 3.1, то есть с учетом регрессии по вспомогательным данным z' . На рис. 8–10 показаны примеры коррелограмм для тех же трех вторичных затмений, что и в разделе 3.4. Прежде всего, модель из уравнения (21) значительно лучше справляется с устранением эффекта внутрипиксельных изменений чувствительности, чем предварительный подход. Например, остаточные субгармоники QPN-членов исчезли (см., рис. 5 и 8). Наши основные выводы о красном шуме остались неизменными. Модели k'_2 (по сравнению с k'_0) и k'_3 (по сравнению с k'_2) демонстрируют значительное улучшение с точки зрения статистики отношения правдоподобия (см. нижнюю часть таблицы 2), при этом лишь модель k'_3 обеспечивает практически полное устранение коррелированного шума (см. таблицу 3). Как видим, только у вторичного затмения номер 12 сохраняются заметные отклонения от белого шума. Это может быть вызвано каким-то временным эффектом, действовавшим на данную конкретную кривую блеска.

Таким образом, двухкомпонентная модель красного шума оказывается довольно устойчивой к методу устранения эффекта внутрипиксельных изменений чувствительности. Она всегда имеет надежное статистическое обоснование. С другой стороны, мы не обнаружили существенных признаков остаточных небелых шумов в невязках (по крайней мере, таких, которые влияли бы на значительное

число кривых блеска вторичных затмений). В таблице 4 приведены оценки некоторых параметров для нашей итоговой модели k'_3 (коэффициенты тренда и регрессии были опущены для краткости). Там же дан полный звездный поток F_\star ; он был рассчитан как усредненная по времени полиномиальная составляющая в уравнении (21) для всех 13 вторичных затмений.

Наконец, мы рассмотрели следующий вопрос, касающийся эффекта внутрипиксельных изменений чувствительности: можно ли построить общую модель, подобную уравнению (18), которая бы описывала все 13 кривых блеска вторичных затмений с помощью единого набора коэффициентов Фурье (\mathbf{a} , \mathbf{b})? Для этого в качестве входных данных использовались наиболее подходящие значения $\mathbf{c}_{\text{fit},i}$. Разложив уравнение (18) в ряд Тейлора в точке (x_0, y_0) , мы линейно выразили вектор коэффициентов \mathbf{c} через \mathbf{a} и \mathbf{b} . Таким образом, для 13 кривых блеска вторичных затмений получилось одинаковое количество векторных линейных уравнений вида $\mathbf{c}_{\text{fit},i} = \mathbf{c}_{\text{model},i}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Поскольку размерность вектора \mathbf{c} равна пяти, система состоит из $5N_{\text{SE}} = 65$ скалярных уравнений для всех $\mathbf{c}_{\text{fit},ik}$ и является переопределенной. Она была решена методом наименьших квадратов (с учетом ковариационной матрицы $\mathbf{c}_{\text{fit},i}$) для получения наиболее подходящих значений \mathbf{a} и \mathbf{b} . Сначала мы применили этот метод к простейшей модели ε_1 , затем к $\varepsilon_{1.5}$ и так далее, увеличивая количество членов разложения ряда Фурье и, соответственно, число его коэффициентов.

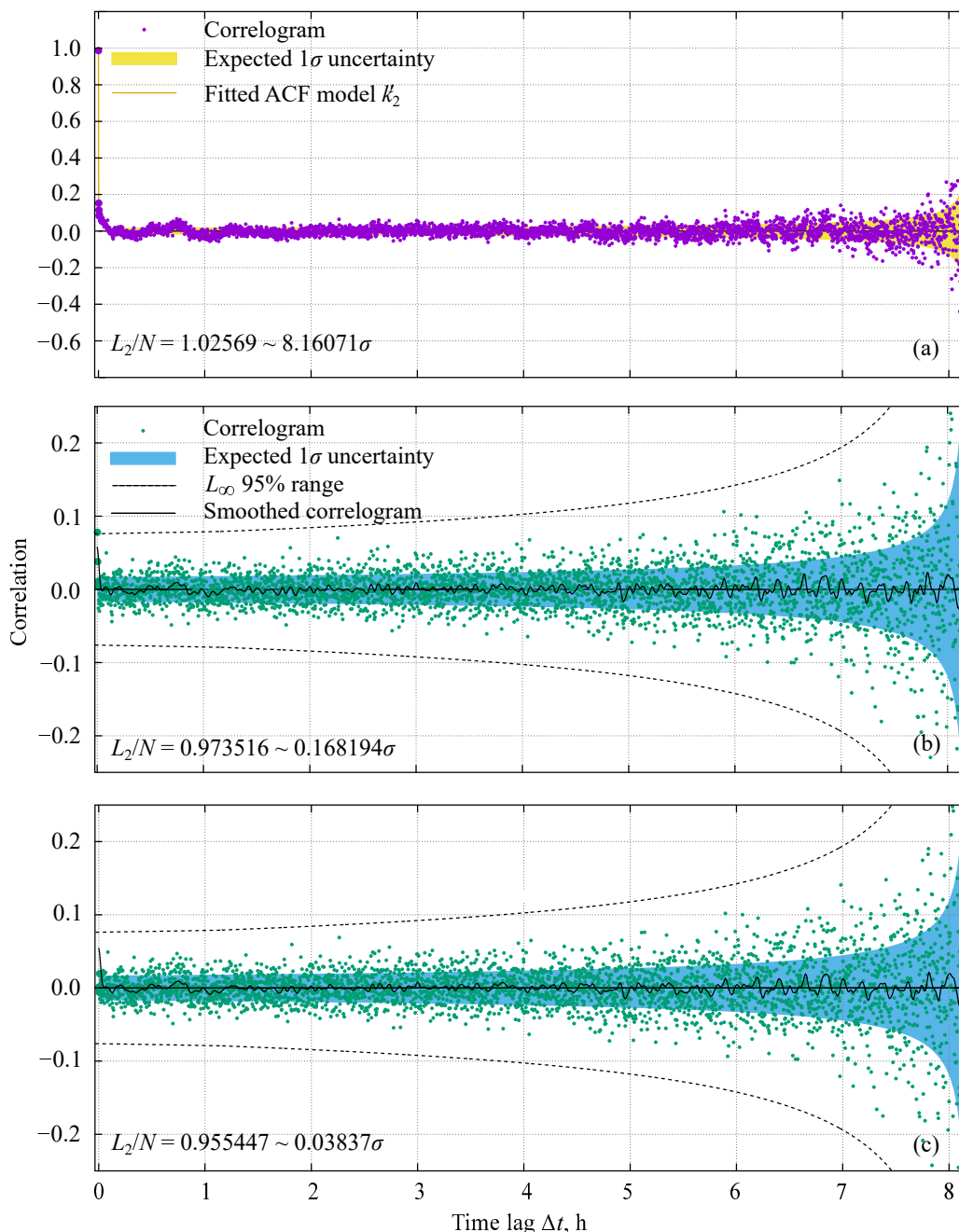


Рис. 8. Коррелограммы наиболее подходящих невязок (CBFR) для первого вторичного затмения. Аналогично рис. 5, но с использованием положения центроида яркости для моделирования эффекта внутрипиксельных изменений чувствительности.

На рис. 11 представлен многообещающий результат. Для построения графика использована модель из уравнения (19) с 12 коэффициентами Фурье. Она вполне напоминает фазовую характеристику пикселя, показанную на рис. 2.

Оценки c_k в целом хорошо с ней согласуются; при этом большинство точек (за исключением небольшого числа относительно плохих) укладываются в пределы погрешности. Нормированное χ^2

указывает на то, что средняя погрешность c_{ik} примерно в пять раз превышает погрешность отдельных точек; столь высокое значение в основном обусловлено значительными отклонениями некоторых из них от модели. Возможно, эти точки требуют детального исследования. Не исключено, что на них влияют дополнительные ошибки в соответствующих кривых блеска. Увеличение количества коэффициентов Фурье позволило несколько снизить получаемое значение χ^2 , однако такая модель, ско-

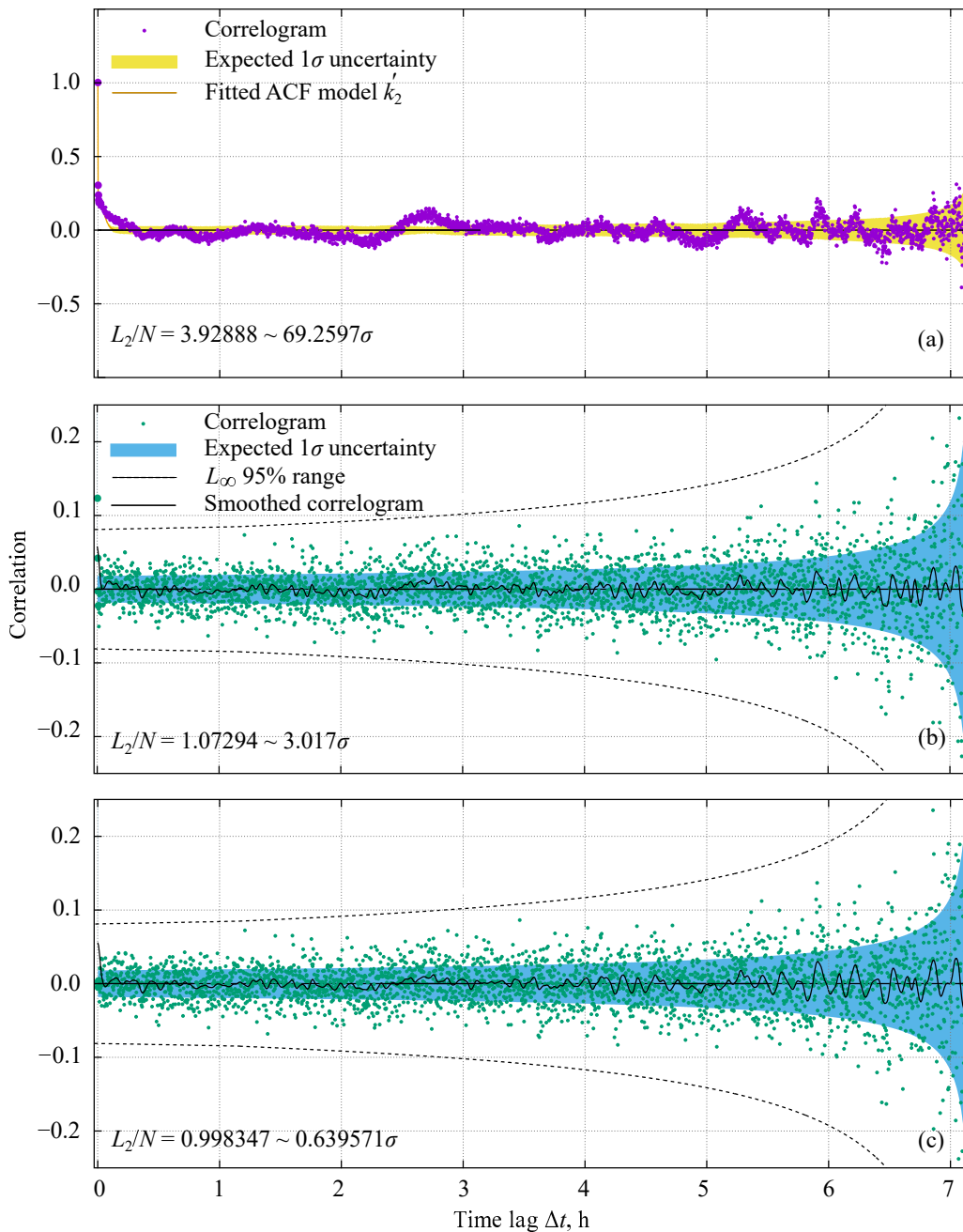


Рис. 9. То же, что и на рис. 8, но для 7-го вторичного затмения.

рее всего, оказалась переобученной. В этой работе мы не рассматривали данный вопрос более подробно, но полагаем, что модель с 12 коэффициентами Фурье может стать хорошим начальным приближением для будущих исследований. В таблице 5 приведены оценки коэффициентов, полученные в результате фиттинга. В следующей работе (готовится к публикации) для повышения точности модели будет использоваться подход с адаптивно выбираемым количеством коэффициентов.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Формально результатом первоначально поставленной задачи стали следующие параметры вторичного затмения: относительный поток с дневной стороны планеты $F_p/F_\star = 0.1254\% \pm 0.0042\%$ и смещение середины вторичного затмения $\Delta t_{SE} = 0.71 \pm 0.67$ минуты. Оценка потока согласуется с данными, полученными, например, в работе Evans et al. (2015). Сдвиг затмения содержит задержку, вызванную конечной скоростью света; она составляет $2a/c$, где a — большая полуось

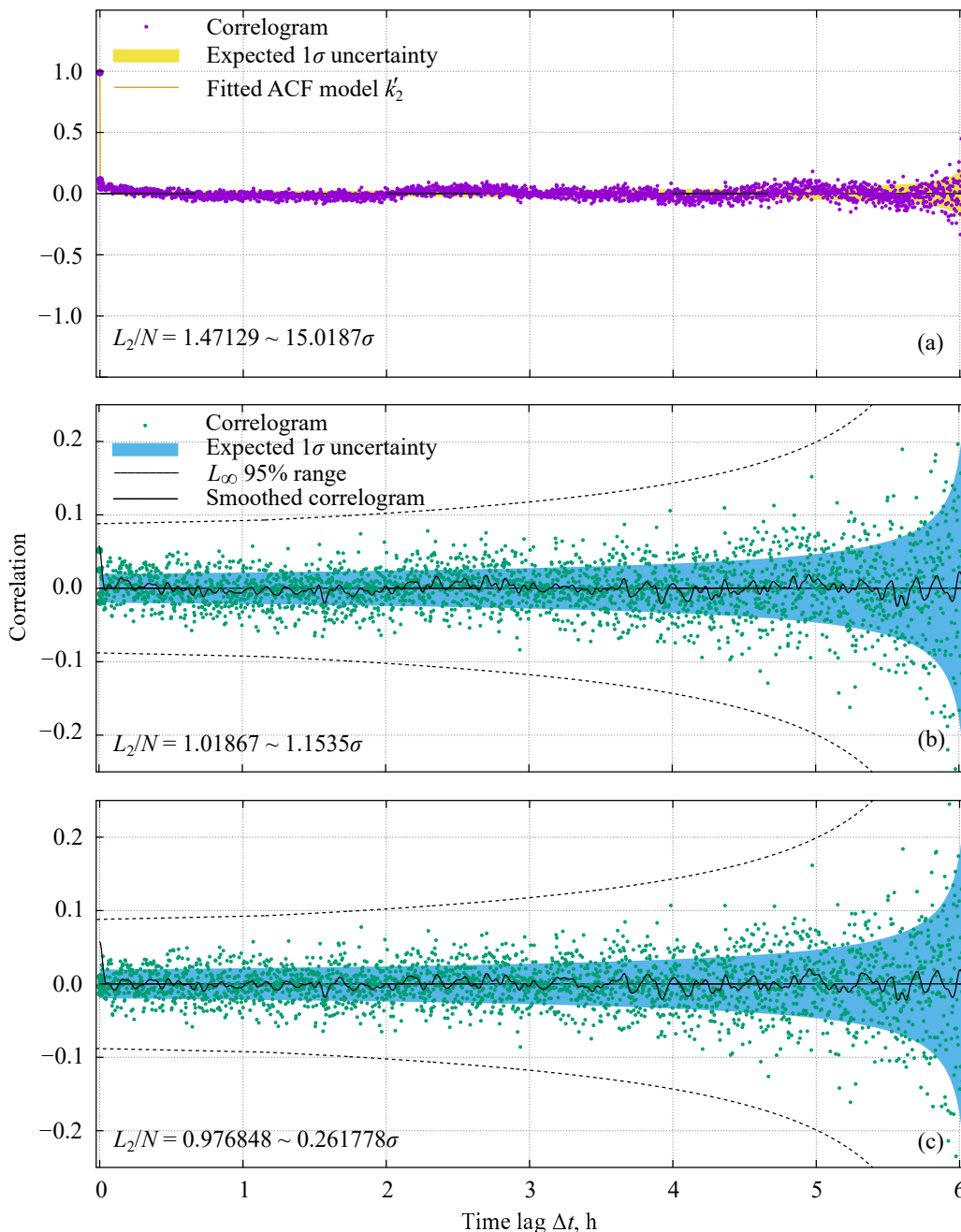


Рис. 10. То же, что и на рис. 8, но для 11-го вторичного затмения.

орбиты планеты, а c — скорость света в вакууме. С учетом этого фактора затмение происходит на 0.07 ± 0.67 минуты раньше прогноза, что согласуется с нулевым значением. Если данное отклонение связывать с неравномерным распределением яркости на поверхности планеты, то оно соответствует пространственному сдвигу 0.007 ± 0.060 радиуса планеты. Если же его связывать с некруговой орбитой планеты, то оценка эксцентриситета составляет $e \cos \omega = (-0.2 \pm 2.1) \times 10^{-4}$.

Мы также проанализировали невязки окон-

чатальной модели, представленной в уравнении (21), и сравнили их с теоретическими моделями Rauscher and Menou (2013), в которых предполагалось несколько вариантов распределения яркости на поверхности планеты (рис. 12). Хотя модели, представленные в работе Rauscher and Menou (2013), дают карты, соответствующие болометрической яркости, а не диапазону 3.6 мкм, который использовался в нашей работе, такое сравнение позволяет оценить типичный масштаб отклонений в кривой блеска, ожидаемых в подобных случаях.

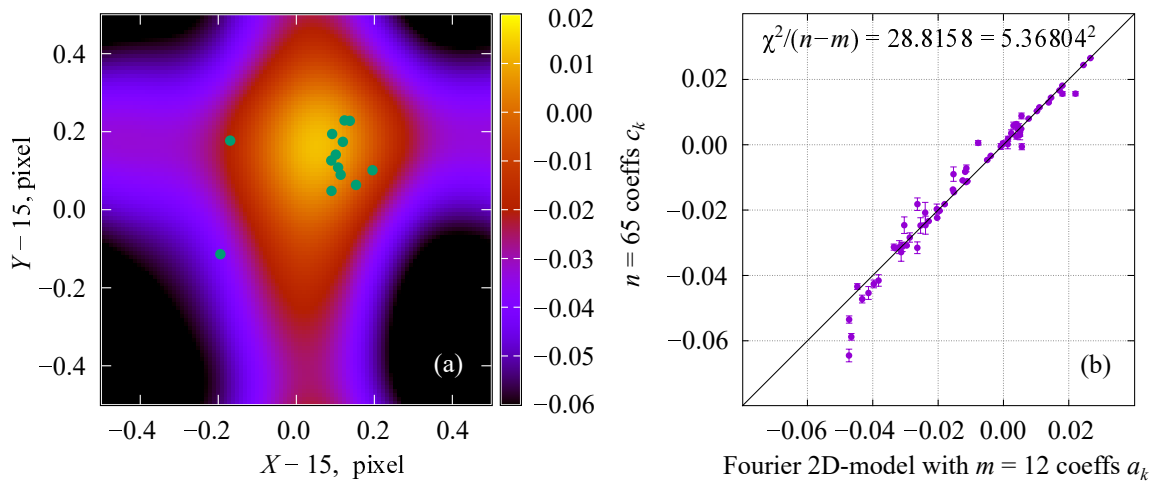


Рис. 11. Глобальная модель эффекта внутрипиксельных изменений чувствительности. Панель (а): глобально подобранная двумерная модель Фурье ε_2 с 12 коэффициентами в зависимости от координат центра яркости (нормирована на общий поток). Панель (b): все 65 подобранных коэффициентов $c_{\text{fit},ik}$ из уравнения (20) (по оси Y) в зависимости от их значений, полученных на основе глобальной модели, показанной на панели (а) (по оси X).

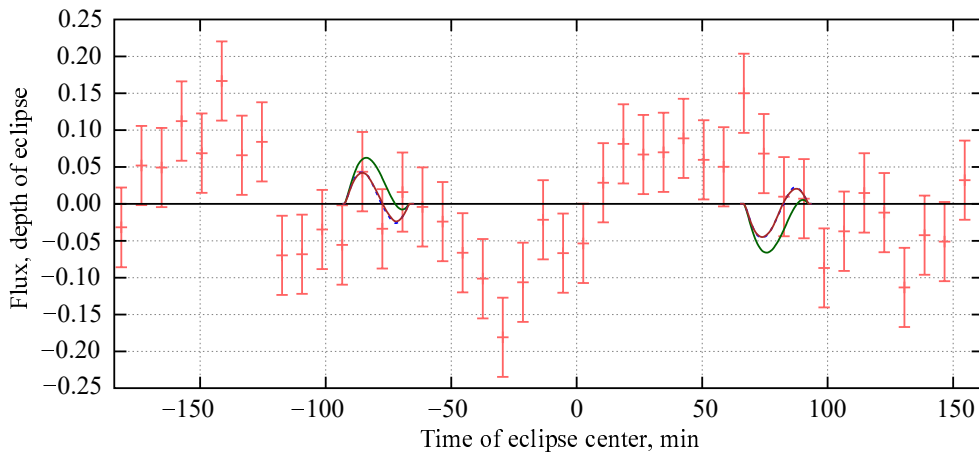


Рис. 12. Наиболее подходящие невязки вторичных затмений, приведенные к периоду планеты и бинированные по 3-минутным интервалам, в сравнении с теоретически предсказанными фотометрическими отклонениями, которые может вызывать неравномерно яркий диск планеты (Rauscher and Menou, 2013). Черная горизонтальная линия соответствует случаю равномерной яркости, темно-зеленая кривая — модели с напряженностью магнитного поля планеты 0 Гс, синяя пунктирная линия — модели с 3 Гс, а коричневая — с 10 Гс. Кривые для 3 Гс и 10 Гс визуально неотличимы. Погрешности в бинах учитывают корреляцию между измерениями в пределах бина.

Погрешности наблюдений, даже после бинирования данных, не позволяют обнаружить столь малые предсказанные отклонения.

Важным результатом работы является обнаружение двух компонентов красного шума в данных ИК-камеры Spitzer/IRAC; их временные характеристики составляют около 10 с и 5 мин. Оба значения упоминаются в работе Evans et al. (2015) для различных кривых блеска вторичных затмений, но в своих моделях авторы учитывали только один компонент красного шума. Похоже, что их оценки перескакивали между этими двумя значениями в качестве альтернативных вариантов. Основываясь на результатах нашего анализа, мы считаем необ-

ходимым включить в модель оба компонента красного шума.

Их амплитуда систематически уменьшается после перехода от модели k_3 к более точной модели k'_3 . Это позволяет предположить, что они связаны с эффектом внутрипиксельных изменений чувствительности. В то же время степень уменьшения разных компонентов шума существенно различается: десятисекундные корреляции почти полностью исчезают (σ уменьшается в 10 раз), пятиминутные — уменьшаются в пять раз, а белый шум понижается в среднем в два раза.

Можно предположить, что метод координатной регрессии все же не учитывает какую-то незначи-

Таблица 5. Наилучшие оценки коэффициентов 12-коэффициентной модели ε_2

Функция	Коэффициент $\times 10^4 F_*^{-1}$
$\cos 2\pi x$	230.0739 (39)
$\sin 2\pi x$	24.9057 (38)
$\cos 2\pi y$	110.0585 (54)
$\sin 2\pi y$	152.1412 (23)
$\cos 2\pi(x + y)$	-19.9080 (30)
$\sin 2\pi(x + y)$	-13.17265 (44)
$\cos 2\pi(x - y)$	29.20643 (73)
$\sin 2\pi(x - y)$	14.3663 (12)
$\cos 4\pi x$	51.76197 (34)
$\sin 4\pi x$	42.77768 (12)
$\cos 4\pi y$	-25.51497 (63)
$\sin 4\pi y$	15.40759 (51)

тельную часть эффекта, в результате чего остаются некоторые шумовые составляющие, которые можно интерпретировать как дополнительный красный шум.

Наконец, мы продемонстрировали, что способны построить двумерную модель Фурье, аппроксимирующую эффект внутрипиксельных изменений чувствительности в данных Spitzer/IRAC глобально, то есть для всех кривых блеска сразу. Этот вопрос требует более детального изучения, однако нашу глобальную модель допустимо использовать в качестве начального приближения при обработке наблюдений вторичных затмений других экзопланет, что мы и реализуем в следующей работе.

БЛАГОДАРНОСТИ

Мы благодарны анонимным рецензентам за ценные и конструктивные замечания, которые помогли нам улучшить нашу статью.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена в рамках государственного задания САО РАН, утвержденного Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, тема FFUS-2024-0021.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ДЛЯ КОРРЕЛОГРАММ

Первая метрика в уравнении (10), L_2 , напоминает статистику критерия хи-квадрат. Пусть нулевая гипотеза утверждает, что $\mathbf{C} = \mathbf{K}_{\text{SWN}}$. Если она верна и, кроме того, вектор \mathbf{C} подчиняется многомерному гауссовому распределению, то все значения C_n статистически независимы (для гауссовых переменных нулевая корреляция означает строгую независимость), и мы действительно получаем классический критерий хи-квадрат. Тогда метрика L_2 подчиняется распределению хи-квадрат с N степенями свободы:

$$F_2(z) := \Pr(L_2 < z) = \frac{\gamma\left(\frac{N}{2}, \frac{z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}, \quad (22)$$

где $\Gamma(a)$ и $\gamma(a, x)$ — гамма-функция и неполная гамма-функция соответственно.

При высоком значении N большинство значений C_n должны быть близки к нормально распределенным благодаря большим суммам в уравнении (7). Однако сложно сказать, насколько это предположение применимо на практике. Метрика L_2 включает в себя квадраты значений C_n , что может усугубить негауссовое поведение и таким образом сделать наш L_2 -тест потенциально ненадежным.

Поэтому мы ввели вторую альтернативную метрику, основанную на L_∞ . По сути, она представляет собой максимальное абсолютное значение нормированной коррелограммы:

$$L_\infty = \max_{n=0,1,\dots,N-1} |c_n|, \quad (23)$$

где $c_n = C_n \sqrt{N-n}$ для $n > 0$ и $c_0 = (C_0 - 1) \sqrt{N/2}$. Опять же, если нулевая гипотеза $\mathbf{C} = \mathbf{K}_{\text{SWN}}$ верна и распределение \mathbf{C} является гауссовым, то все C_n , как и прежде, независимы друг от друга, а распределение каждого c_n — стандартное нормальное. Это означает, что $\Pr(c_n < z) = \Phi(z)$ и $\Pr(|c_n| < z) = \Pr(-z < c_n < z) = \Phi(z) - \Phi(-z) = 1 - 2\Phi(-z)$. Наконец, функция распределения максимального значения $\max |c_n|$ равна вероятности того, что все $|c_n|$ будут меньше одного и того же значения z , то есть

$$F_\infty(z) := \Pr(L_\infty < z) = (1 - 2\Phi(-z))^N \quad (24)$$

благодаря независимости c_n .

Большое значение любого L_k указывает на то, что наша нулевая гипотеза, скорее всего, неверна и CBFR не согласуется с белым шумом. Основываясь на уравнениях функций распределения (22)

и (24), мы можем численно сопоставить наблюдаемую СВFR-метрику L_k с вероятностью ложной тревоги (FAP), а затем — с соответствующим нормальным уровнем значимости s следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{FAP} &= 1 - F_k(L_k), \\ s &= \Phi^{-1}\left(\frac{\text{FAP}}{2}\right) = \Phi^{-1}\left(\frac{1 - F_k(L_k)}{2}\right). \end{aligned} \quad (25)$$

Оба теста основаны на предположении о гауссовости C . Однако потенциальная негауссовость влияет на них по-разному, поскольку L_∞ позволяет избежать возведения C_n в степень. В зависимости от того, является ли фактическое распределение C_n лептокуртичным или платикуртичным, тот или иной тест может вести себя хуже. В любом случае слишком большая разница между их результатами указывает на негауссовость, поэтому вывод будет наиболее надежным, если оба теста качественно согласуются друг с другом (то есть оба предполагают, что шум не является белым).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Agol, N. B. Cowan, H. A. Knutson, et al., *Astrophys. J.* **721** (2), 1861 (2010). DOI:10.1088/0004-637X/721/2/1861
2. R. V. Baluev, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **393**, 969 (2009). DOI:10.1111/j.1365-2966.2008.14217.x
3. R. V. Baluev, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **429**, 2052 (2013a). DOI:10.1093/mnras/sts476
4. R. V. Baluev, *Astronomy and Computing* **2**, 18 (2013b). DOI:10.1016/j.ascom.2013.07.001
5. R. V. Baluev, *Astronomy and Computing* **25**, 221 (2018). DOI:10.1016/j.ascom.2018.10.005
6. R. V. Baluev and A. A. Fedotov, *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, **59**, 9 (2026). DOI:10.1134/S1063454125700736
7. R. V. Baluev and V. S. Shaidulin, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **454**, 4379 (2015). DOI:10.1093/mnras/stv2251
8. R. V. Baluev, E. N. Sokov, H. R. A. Jones, et al., *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **490**, 1294 (2019). DOI:10.1093/mnras/stz2620
9. R. V. Baluev, E. N. Sokov, V. S. Shaidulin, et al., *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **450**, 3101 (2015). DOI:10.1093/mnras/stv788
10. A. S. Bonomo, S. Desidera, S. Benatti, et al., *Astron. and Astrophys.* **602**, id. A107 (2017). DOI:10.1051/0004-6361/201629882
11. L. Bradley, B. Sipocz, T. Robitaille, et al., *astropy/photutils: v0.6* (2019).
12. D. Charbonneau, L. Allen, A. Burrows, et al., *Spitzer Proposal ID 20523* (2005).
13. D. Charbonneau, H. A. Knutson, T. Barman, et al., *Astrophys. J.* **686** (2), 1341 (2008). DOI:10.1086/591635
14. J. de Wit, M. Gillon, B. O. Demory, and S. Seager, *Astron. and Astrophys.* **548**, id. A128 (2012). DOI:10.1051/0004-6361/201219060
15. D. Deming, H. Knutson, J. Kammer, et al., *Astrophys. J.* **805** (2), id. 132 (2015). DOI:10.1088/0004-637X/805/2/132
16. J.-M. Désert, A. Lecavelier des Etangs, G. Hébrard, et al., *Astrophys. J.* **699** (1), 478 (2009). DOI:10.1088/0004-637X/699/1/478
17. T. M. Evans, S. Aigrain, N. Gibson, et al., *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **451** (1), 680 (2015). DOI:10.1093/mnras/stv910
18. D. Foreman-Mackey, E. Agol, S. Ambikasaran, and R. Angus, *Astron. J.* **154**, id. 220 (2017). DOI:10.3847/1538-3881/aa9332
19. H. A. Knutson, E. Agol, A. Burrows, et al., *Spitzer Proposal ID 60021* (2008a).
20. H. A. Knutson, D. Charbonneau, L. E. Allen, et al., *Nature* **447** (7141), 183 (2007). DOI:10.1038/nature05782
21. H. A. Knutson, D. Charbonneau, L. E. Allen, et al., *Astrophys. J.* **673** (1), 526 (2008b). DOI:10.1086/523894
22. N. Lewis, N. Cowan, H. Knutson, et al., *Spitzer Proposal ID 10103* (2013).
23. C. Majeau, E. Agol, and N. B. Cowan, *Astrophys. J.* **747** (2), id. L20 (2012). DOI:10.1088/2041-8205/747/2/L20
24. K. Mandel and E. Agol, *Astrophys. J.* **580**, L171 (2002). DOI:10.1086/345520
25. M. B. Priestley, *Spectral analysis and time series*, Vol. 1: *Probability and mathematical statistics* (Academic Press, London, 1981).
26. E. Rauscher and K. Menou, *Astrophys. J.* **764** (1), id. 103 (2013). DOI:10.1088/0004-637X/764/1/103
27. T. P. Robitaille et al. (Astropy Collab.) *Astron. and Astrophys.* **558**, id. A33 (2013). DOI:10.1051/0004-6361/201322068
28. S. Seager and D. Deming, *Annual Rev. Astron. Astrophys.* **48**, 631 (2010). DOI:10.1146/annurev-astro-081309-130837
29. K. Todorov, D. Deming, H. Knutson, and J. Fortney, *Spitzer Proposal ID 90186* (2012).
30. J. N. Winn, in *Exoplanets* Ed. by S. Seager (University of Arizona Press, Tucson, 2010), pp. 55–77. DOI:10.48550/arXiv.1001.2010

Effect of Spitzer/IRAC Systematic Noises on Secondary Eclipses of the Exoplanet HD 209458 b**A. A. Fedotov¹ and R. V. Baluev^{1,2}**¹Special Astrophysical Observatory, Russian Academy of Sciences, Nizhnii Arkhyz, 369167 Russia²St. Petersburg University, St. Petersburg, 199034 Russia

We analyze infrared light curves for 13 secondary eclipses of the exoplanet HD 209458 b obtained by Spitzer/IRAC in the 3.6 μm channel. We find that in addition to the well-known effect of intra-pixel sensitivity variations, inducing quasiperiodic noise, these data also contain red noise which in turn consists of two subcomponents that differ by their correlation timescale, 10–20 s and 5–10 min. We also show that a global model of the intra-pixel sensitivity effect can be constructed such that it can fit all 13 light curves at once but uses only a few parameters (e.g., 12 or so). Finally, we tried to measure the systematic time shift of the exoplanetary secondary eclipse, which appeared consistent with zero, -4 ± 40 s. This corresponds to a spatial shift of 0.007 ± 0.060 in units of planet radius, or to the orbital eccentricity $e \cos \omega$ of $(-0.2 \pm 2.1) \times 10^{-4}$.

Keywords: *infrared: planetary systems, techniques: photometric, methods: data analysis, planetary systems, stars: individual: HD 209458*